





پیام نوری عزیز سلام	
میتونی وقتتو با ۵۰۰ صفحه کتاب خوندن تلف کنی	
میتونی وقتتو با دانلود بیخود نمونه سوال تلف کنی. آخه نمونه سوال خالی بدون اینکه کسی چیزی یادت بده به چه دردت میخوره!!!!	
نمیدونی باید چی کار کنی!؟	

حالا به حرف من گوش کن	
اولا تو ریاضی سوالای همه رشته‌ها یکیه. فقط ممکنه ترتیبش عوض بشه.	
دوما ما زحمت دسته بندی سوالا رو تو این جزوه کشیدیم و نمره هر موضوع مشخصه	
سوما سوالا حل دارن و فقط سوالای پیام نوره. اگه چیزی بلدی که با این جزوه میتونی بارتو ببندی	
اگه هم بلد نیستی بازم مهم نیست فقط به من چند ساعت وقت بده پاسِت میکنم. کافیه پکیج طلایی ریاضی من رو از سایت uniland.ir تهیه کنی بهت قول میدم دیوونش میشی!	



ریاضی ۱

شب امتحان پیام نور



مهندس علی مهدیان

ریاضی عمومی ۱

نوع امتحان: تستی- تشریحی

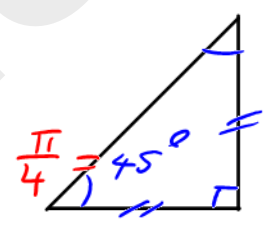
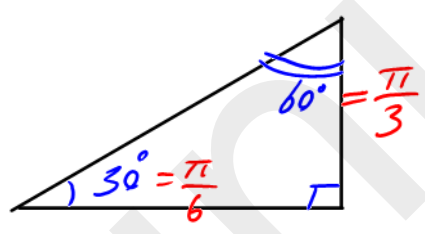
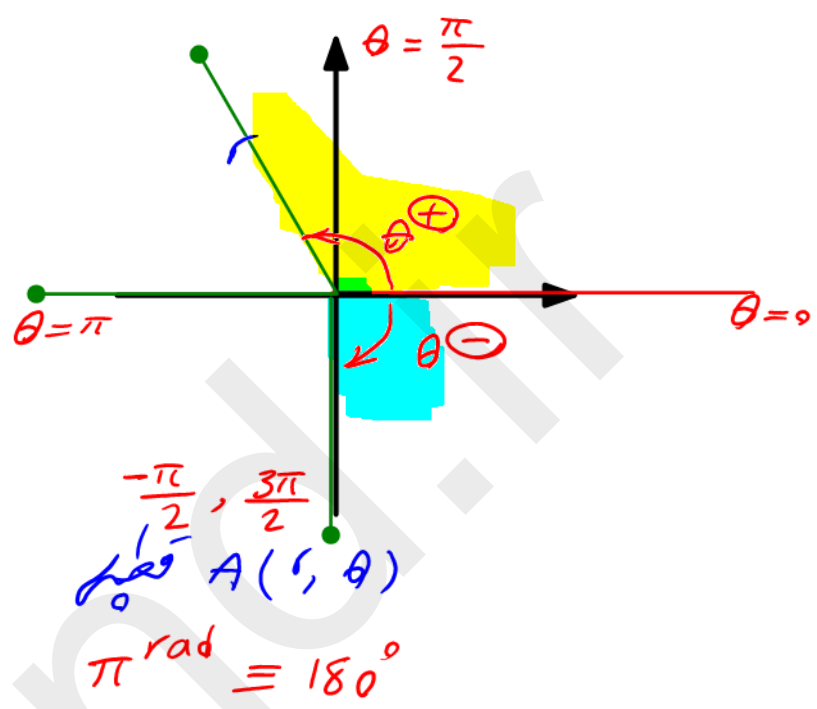
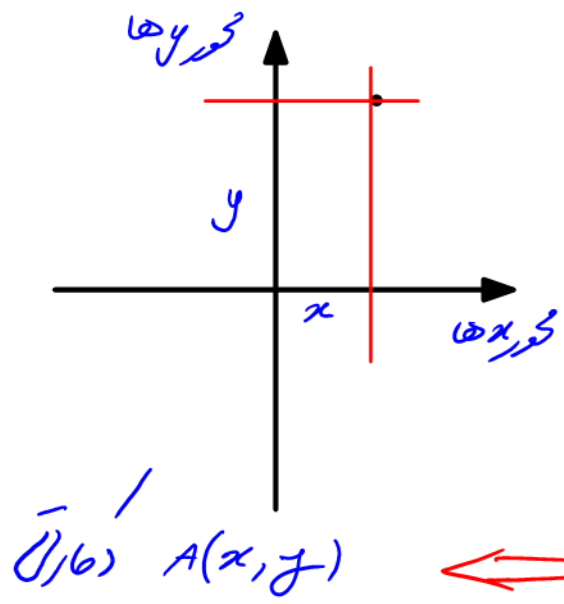
زمان آزمون: تستی: ۱ ساعت - تشریحی: ۱ ساعت

درسنامه ۱: مختصات قطبی

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟
توجه ۱: هر امتحان شامل ۲۰ تست و ۵ سوال تشریحی است.
توجه ۲: از ۹۶ به بعد هر تست ۰/۷ نمره و هر سوال تشریحی ۱/۲ نمره دارد.

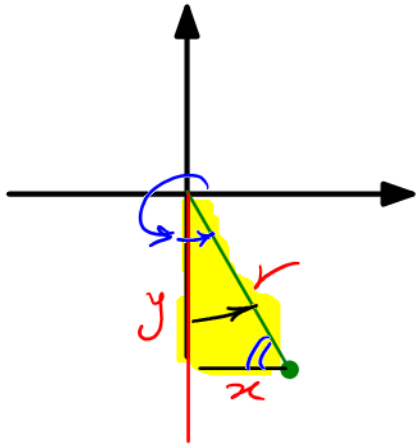
۹۵-۳	۹۵-۱۰	۹۶-۳	۹۶-۱۰	۹۷-۴	۹۷-۱۰	۹۸-۴	
۰/۶۵	۲	۰/۷	۲/۸	۲/۱	۲/۸	۲/۱	تستی
۱/۴	۱/۴	۱/۲	۰	۰	۱/۲	۱/۲	تشریحی
۲	۳/۴	۱/۹	۲/۸	۲/۱	۴	۳/۳	مجموع

دو شکل از مختصات یک نقطه



(۹۷/۴)

تست: مختصات قطبی نقطه $(2, -2\sqrt{3})$ با شرط $r > 0$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ کدام است؟
 x y



$$r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

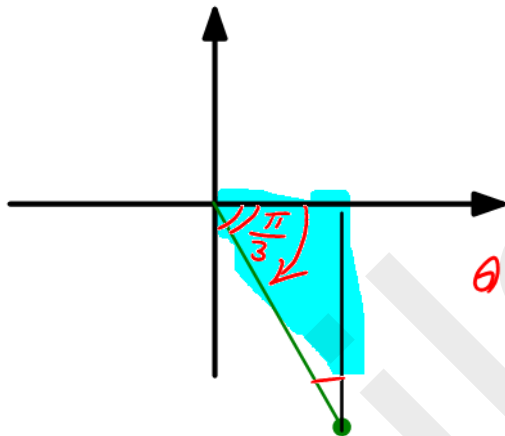
~~$(4, \frac{2\pi}{3})$ (۱)~~

$(4, \frac{5\pi}{3})$ (۲)

~~$(4, \frac{4\pi}{3})$ (۳)~~

~~$(4, \frac{\pi}{3})$ (۴)~~

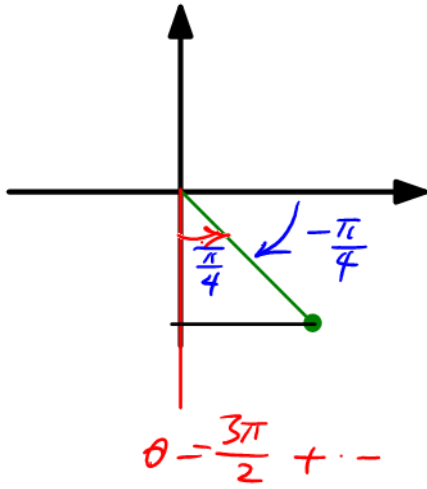
$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$



$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تست: مختصات قطبی نقطه $(1, -1)$ کدام است؟
 $x \quad y$



~~$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ (۱)~~

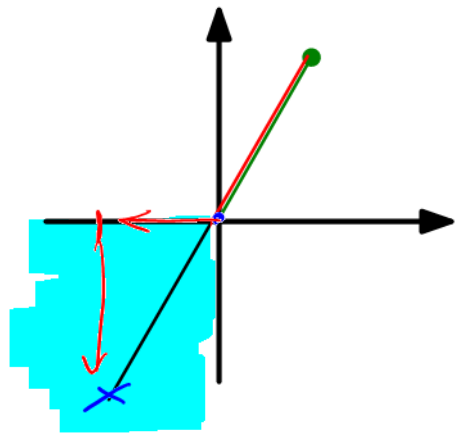
$(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ (۲)

~~$(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ (۳)~~

~~$(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ (۴)~~

(۹۶/۱۰ و ۹۷/۱۰)

تست: مختصات دکارتی نقطه $(-2, \frac{\pi}{3})$ کدام گزینه زیر است؟
 r θ



$$r = -2$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

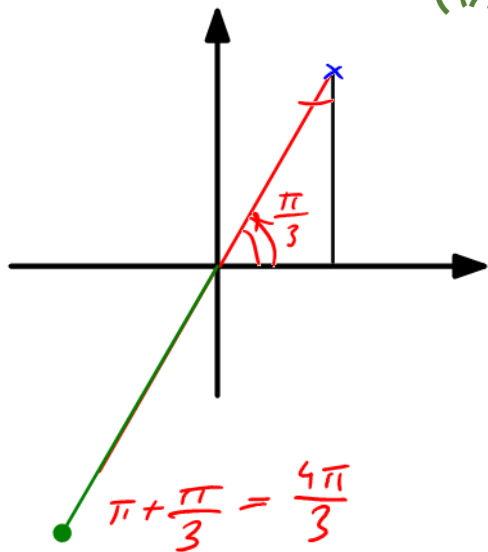
- $(-1, -\sqrt{3})$ (۱)
- $(-1, \sqrt{3})$ (۲)
- $(1, \sqrt{3})$ (۳)
- $(1, -\sqrt{3})$ (۴)

uniland.ir

دو شکل از معادله منحنی

تست: صورت قطبی معادله $y = \sqrt{3}x$ کدام است؟ (۹۶/۱۰ و ۹۷/۱۰)

$$x > 0$$



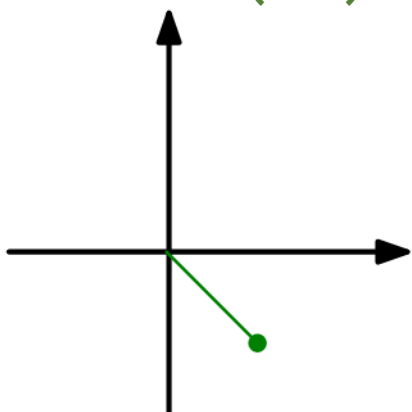
$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

تست: مکان هندسی نقاط p که در شرط $r = 2$ در دستگاه قطبی صدق می‌کند (۹۷/۱۰)



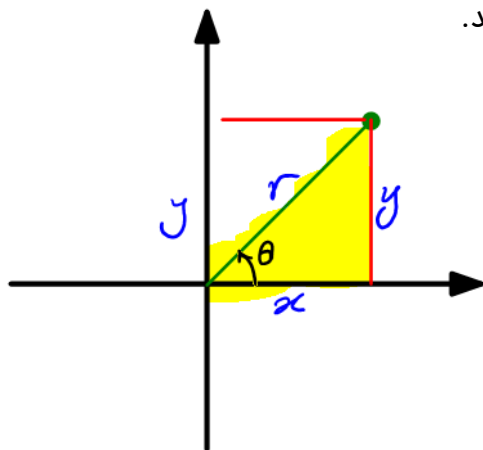
(۱) خطی با شیب ۲ است.

(۲) خطی است که از مبدا می‌گذرد.

(۳) دایره‌ای است که مرکز آن مبدا و شعاع ۲ دارد.

(۴) دایره‌ای است که مرکز آن $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ است.

تشریحی: معادله خط راست $2x - 3y = 5$ در مختصات قطبی بنویسید.



$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$
$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta$$

$$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$$

$$2r \cos \theta - 3r \sin \theta = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{2 \cos \theta - 3 \sin \theta}$$

تست: شکل دکارتی معادله $r = 2 \sin \theta$ کدام است؟ (۹۷/۴ و ۹۸/۴)

$$x^2 - y^2 = 4 \quad (1)$$

معادله دایره است. $x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad (2)$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (4)$$

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

$$r = 2 \sin \theta \xRightarrow{xr} r^2 = \underbrace{2r \sin \theta}_y \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

تست: شکل دکارتی معادله $r = 2 \cos \theta$ کدام است؟ (۹۶/۱۰)

$$x^2 - y^2 = 4 \quad (۱)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (۲)$$

$$\underline{x^2 + y^2 - 2x = 0} \quad (۳)$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{2r \cos \theta}{x}$$

uniland.ir

تست: شکل دکارتی معادله $r = \cos \theta$ کدام است؟ (۹۵/۱۰)

$$x + y = x^2 \quad (۱)$$

$$x + y = 1 \quad (۲)$$

$$x^2 + y^2 = y \quad (۳)$$

$$x^2 + y^2 = x \quad (۴)$$

$$x^2 + y^2 = x$$

uniland.ir

(۹۸/۴)

تست: نقاط تلاقی دو منحنی $r = 2 - 2 \cos \theta$ و $r = 2 \cos \theta$ کدام است؟

$$1 = \frac{2 \cos \theta}{2} = \cos \theta$$

(۱) $(1, \frac{\pi}{6})$ و قطب

(۲) $(1, \frac{\pi}{3})$ و $(1, \frac{5\pi}{3})$ و قطب

(۳) $(1, \frac{\pi}{3})$ و $(-1, \frac{5\pi}{3})$

(۴) $(1, \frac{-5\pi}{6})$ و $(-1, \frac{5\pi}{6})$

تست‌های تقارن‌ها

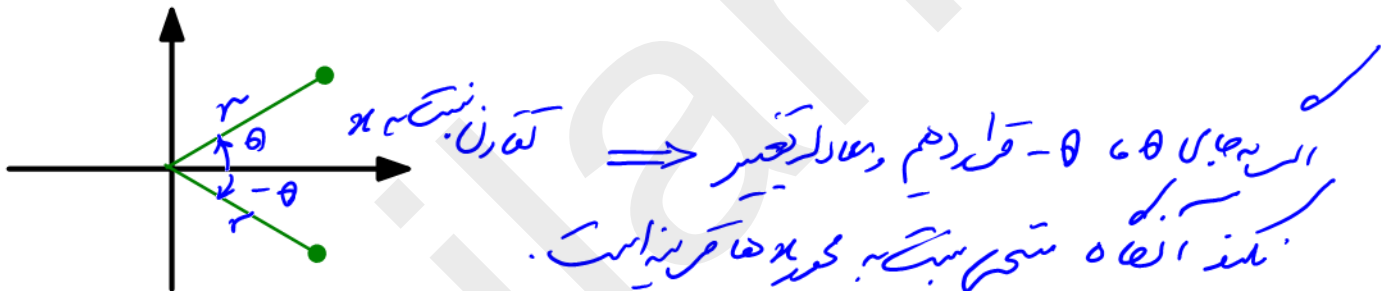
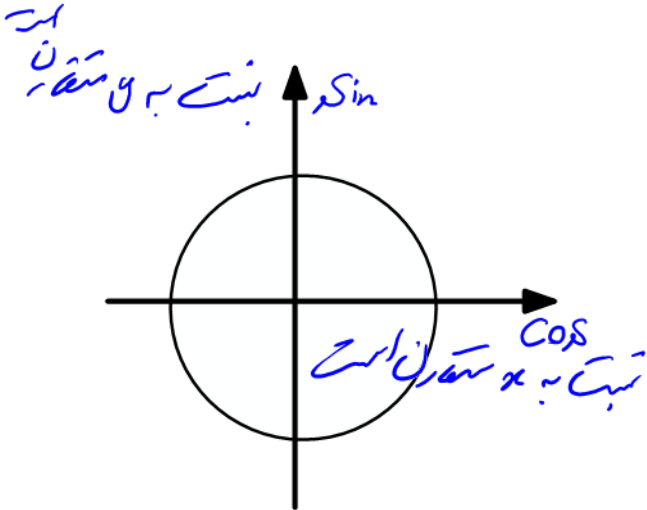
تست: محور تقارن نمودار $r = 2 + \cos \theta$ کدام است؟ (۹۵/۳)

(۱) محور x ها

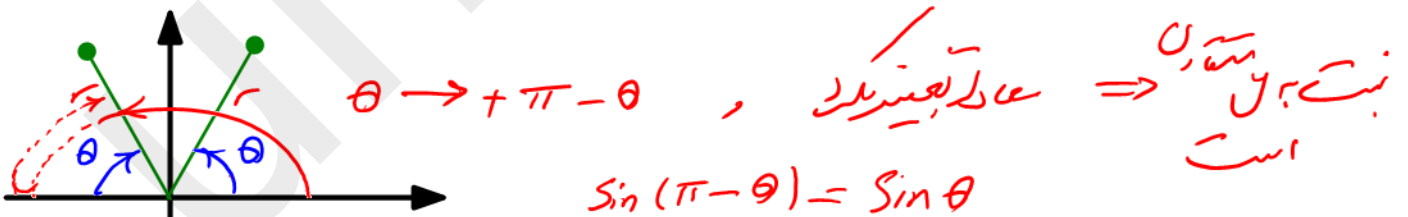
(۲) محور y ها

(۳) موارد ۱ و ۲

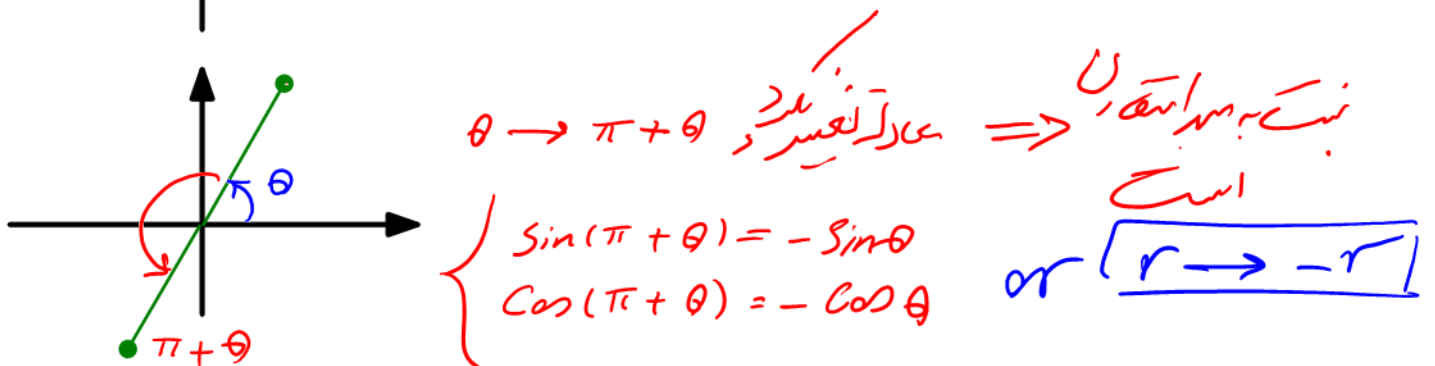
(۴) هیچکدام



$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$



$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$



$$\begin{cases} \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \\ \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \end{cases}$$

$$\text{or } \boxed{r \rightarrow -r}$$

تست: در مورد معادله $r = 2 + \cos \theta$ کدام گزینه صحیح است؟ (۹۵/۱۰)

(۱) نسبت به قطب متقارن است.

(۲) نسبت به محور x ها متقارن است.

(۳) نسبت به محور y ها متقارن است.

(۴) متقارن نیست.

تست: کدامیک از منحنی‌های زیر نسبت به مبدا مختصات (قطب) متقارن است؟ (۹۷/۴)

$$r = 1 + 2 \cos \theta \quad (۱)$$

$$r = 1 + \sin \theta \quad (۲)$$

$$r^2 = 3 \cos \theta \quad (۳)$$

$$r = \sin \theta \quad (۴)$$

$$r^2 = 3 \cos \theta$$

uniland.ir

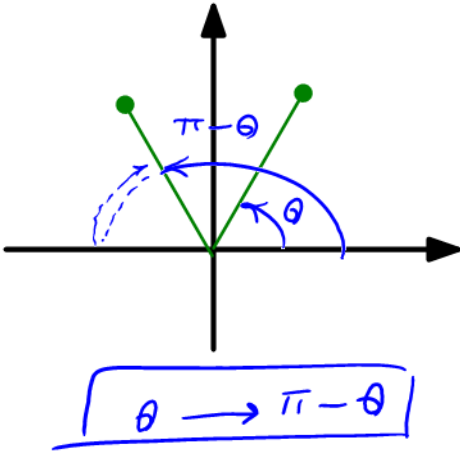
تست: در مورد منحنی $r = 3 \cos 4\theta$ می توان گفت: (۹۶/۱۰)

(۱) فقط نست به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است.

(۲) فقط محور y ها، محور تقارن منحنی است.

(۳) فقط محور x ها، محور تقارن منحنی است.

(۴) نسبت به مبدا متقارن است.



$$r = 3 \cos 4(\pi - \theta)$$

$$r = 3 \cos (4\pi - 4\theta)$$

$$r = 3 \cos (-4\theta) \Rightarrow r = 3 \cos 4\theta \checkmark$$

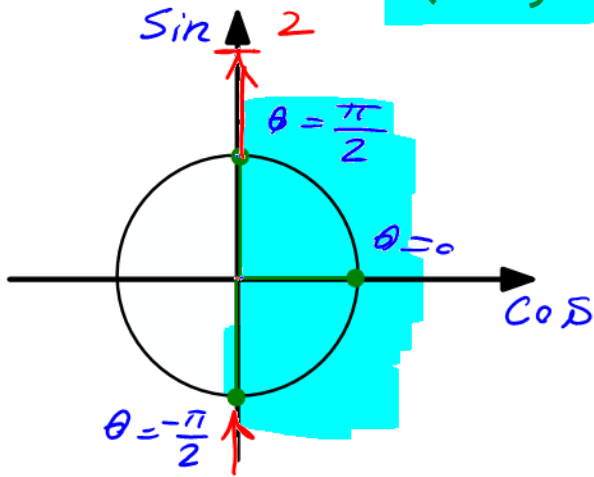
تبارن نسبت به y محور

نسبت به x محور \leftarrow نسبت به مبدا متقارن

رسم نمودار

(۹۷/۱۰ و ۹۸/۴)

تشریحی: نمودار $r = 1 + \sin \theta$ را رسم کنید.

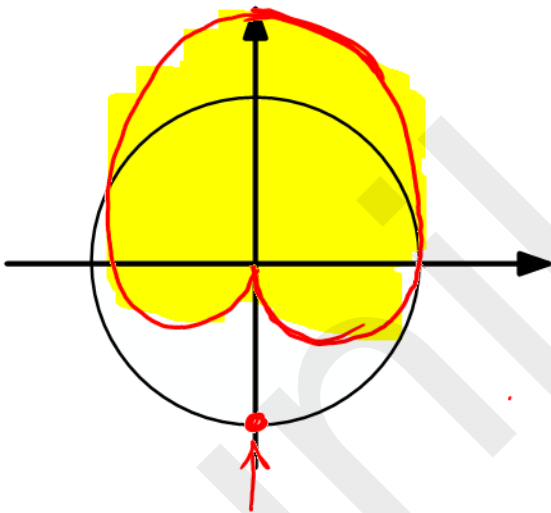


نسبت بین متغیر است

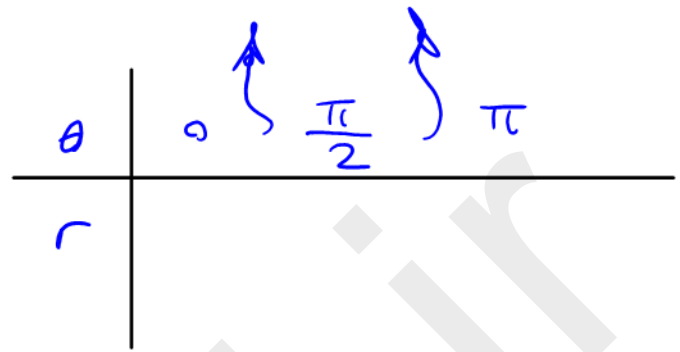
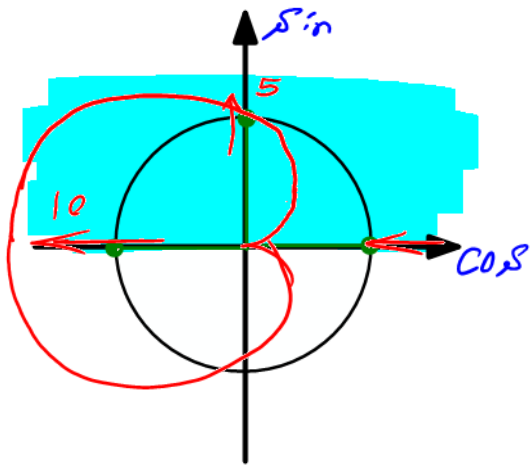
@ $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1 + \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0$

@ $\theta = 0 \Rightarrow r = 1 + \sin 0 = 1$

@ $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1 + 1 = 2$



تشریحی: نمودار $r = 5(1 - \cos \theta)$ را رسم کنید. (۹۶/۳)



درسنامه ۲: اعداد مختلط

پیشنیاز: مختصات قطبی و نسبت‌های مثلثاتی

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟							
توجه ۱: هر امتحان شامل ۲۰ تست و ۵ سوال تشریحی است.							
توجه ۲: از ۹۶ به بعد هر تست ۰/۳ نمره و هر سوال تشریحی ۱/۲ نمره دارد (۱۲ نمره پایان ترم).							
۹۵-۳	۹۵-۱۰	۹۶-۳	۹۶-۱۰	۹۷-۴	۹۷-۱۰	۹۸-۴	
۰/۳۵	۱	۰/۳	۰/۹	۰/۹	۱/۲	۱/۲	تستی
۱/۴	۰	۱/۲	۰	۱/۲	۱/۲	۱/۲	تشریحی
۲	۲	۱/۵	۰/۹	۲/۱	۲/۴	۲/۴	مجموع

$$i = \sqrt{-1}$$

واحد مجهول

i چیست؟

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^5 = i \cdot i^4 = +i$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^{17} = i \cdot i^{16} = i \cdot (i^2)^8 = i \cdot (-1)^8 = +i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = +1$$

تست: کدام یک از اعداد زیر در معادله $z^3 + 3z + 2i = 0$ صدق می‌کند. (۹۶/۳)

- $z = -i$ (۱)
- $z = i$ (۲)
- $z = 3i$ (۳)
- $z = -3i$ (۴)

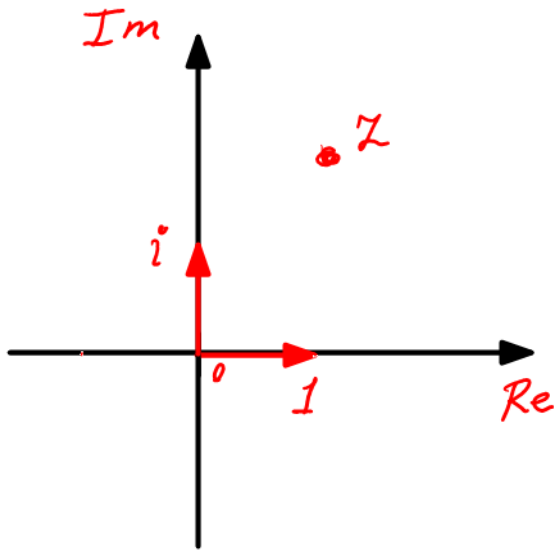
$$(-i)^3 - 3i + 2i = +i \cdot i - i = 0$$

$$i^2 \cdot i + 3i + 2i = 4i \neq 0$$

نمایش اعداد مختلط چگونه است؟

قسمت حقیقی و موهومی

مزدوج یک عدد مختلط چگونه حساب می‌شود؟



$$z = \underbrace{1}_{\text{Re}} + \underbrace{2i}_{\text{Im}}$$

$$z = x + iy \equiv (x, y)$$

در دسته (x, y)

$\overline{z} \equiv$ مزدوج $z \equiv$ قرینه نسبت به محور x ها \equiv علامت ضرب i را بدست آورد.

تست: اگر عدد $z = 1 - 3i$ یک عدد مختلط باشد، آنگاه مقدار $-\bar{z}$ برابر است با: (۹۷/۱۰)

۱ - 3i (۱)

-1 - 3i (۲)

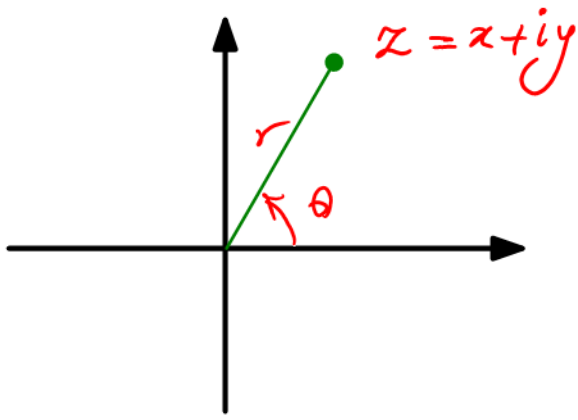
-1 + 3i (۳)

1 + 3i (۴)

$$-\bar{z} = -(1+3i) = -1-3i$$

uniland.ir

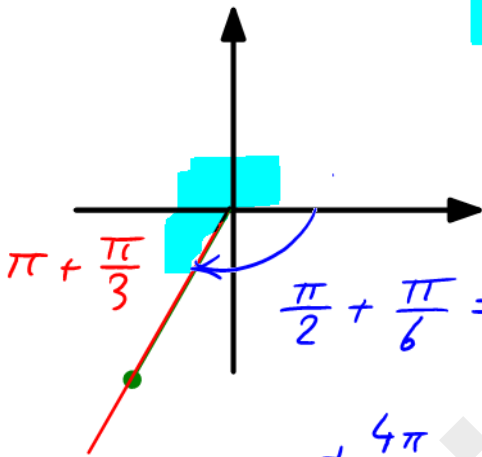
اندازه و آرگومان یک عدد مختلط



$\arg(z) = \theta$

$|z| = r$

تست: آرگومان اصلی عدد مختلط $z = -1 - \sqrt{3}i$ کدام است؟ (۹۷/۴)



$e \leq \theta < 2\pi$

- $-\frac{\pi}{3}$
- $\frac{2\pi}{3}$
- $\frac{5\pi}{3}$
- $\frac{4\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$+\frac{4\pi}{3} \quad -\frac{2\pi}{3}$

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

تست: قدر مطلق عدد $z = \frac{2}{1-3i}$ کدام است؟ (۹/۴)

انگاره

- ~~$\sqrt{\frac{5}{3}}$ (۱)~~
- ~~$\frac{2}{5}$ (۲)~~
- ~~$\frac{10}{25}$ (۳)~~
- $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (۴)

$$|z| = \left| \frac{2}{1-3i} \right| = \frac{2}{|1-3i|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{4}{10}}$$

$$|1-3i| = \sqrt{1^2 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

تست: حاصل عبارت $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{60} (-1 - i\sqrt{3})^{12}$ کدام است؟ (۹۸/۴)

- 2⁵ (۱)
- 2⁴⁸ (۲)
- 2¹² (۳)
- 2⁶⁰ (۴)

$$|z| = \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \right)^{60} \left(\sqrt{\frac{1+3}{2}} \right)^{12} = 2^{12}$$

uniland.ir

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = 1 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = 1 + i + 1 + 3i = 2 + 4i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + i - 1 - 3i = -2i$$

$$z_1 z_2 = (1+i)(1+3i) = 1 + 3i + i + 3i^2 = -2 + 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{(1+i)(1-3i)}{1+9} = \frac{1}{10} (1+i)(1-3i)$$

$$(x+iy)(x-iy) = a^2 - b^2 = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2$$

$$\boxed{z \bar{z} = |z|^2}$$

تست: عدد مختلط $\frac{1+i}{1-i}$ برابر است با: (۹۷/۴ و ۹۶/۱۰)

$$\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+i^2+2i}{2}$$

- (۱) i
- (۲) $-i$
- (۳) $1+i$
- (۴) $1-i$

$$\frac{2i}{2} = i$$

uniland.ir

تست: اگر $\frac{1}{z} = i - 1$ باشد آنگاه z برابر است با: (۹۶/۱۰)

$$z = -\frac{i-1}{2} \quad (۱)$$

$$z = \frac{i-1}{2} \quad (۲)$$

$$z = \frac{1}{i+1} \quad (۳)$$

$$z = i + 1 \quad (۴)$$

$$\frac{1}{z} = i - 1$$

$$z = \frac{1}{i-1} \times \frac{-i-1}{-i-1} = \frac{1}{1+1} = \frac{-i-1}{2} = -\frac{i}{2} - \frac{1}{2}$$

uniland.ir

تست: حاصل عبارت $\frac{i^{18}-i^{17}}{1+i}$ کدام است؟ (۹۷/۱۰ و ۹۸/۴)

~~$i \cdot i$~~ $\frac{i-1}{i+1} = \frac{-1-i}{1+i} = -\frac{1+i}{1+i} = -1$

- 1 (۱)
- 1 (۲)
- i (۳)
- i (۴)

uniland.ir

تشریحی: مقادیر مختلط $\frac{1}{z}$ و \bar{z} را در معادله $\frac{2iz+3}{3z-1} = \frac{i+1}{2}$ پیدا کنید. (۹۸/۴)

$$\frac{2iz+3}{3z-1} = \frac{i+1}{2} \Rightarrow 4iz+6 = (3i+3)z - i - 1$$

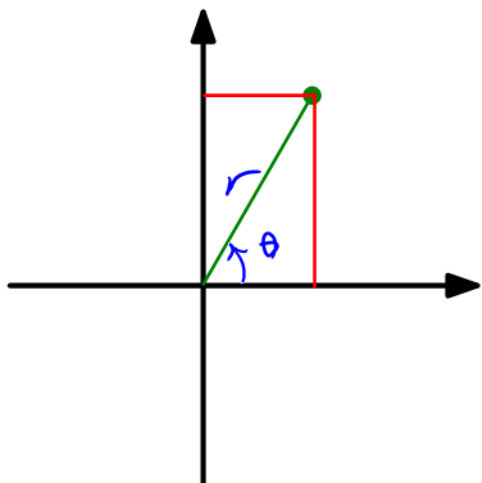
$$(i-3)z = -i-7 \Rightarrow z = \frac{-i-7}{i-3}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{i-3}{-i-7} \times \frac{i-7}{+i-7} = \frac{-1-7i-3i+21}{50} = \frac{-10i+20}{50}$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = -\frac{i}{5} + \frac{2}{5}}$$

$$\bar{z} = \frac{+i-7}{-i-3} = \dots$$

فرم قطبی و مثلثاتی عدد مختلط



$$z = x + iy \quad \text{دکارتی}$$

$$x = r \cos \theta$$

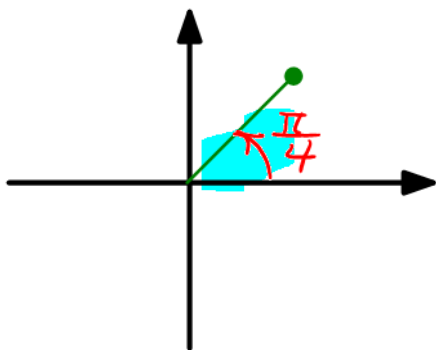
$$y = r \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r (\underbrace{\cos \theta + i \sin \theta}_{\text{cis } \theta}) = r e^{i\theta}$$

↑
توان
تعبیر

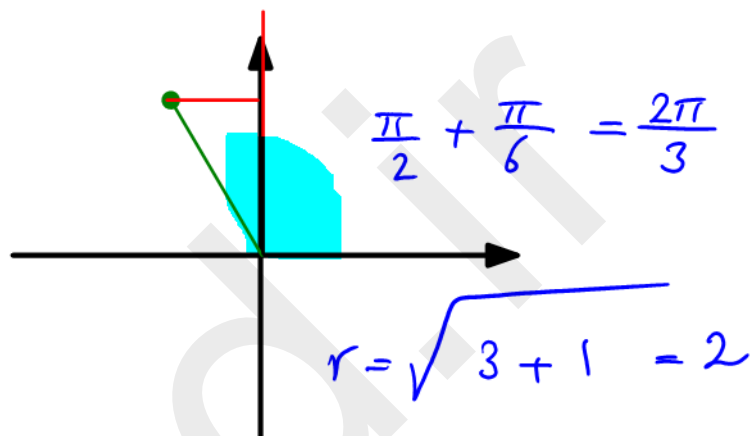
رابطه آویلر : $\text{cis } \theta = e^{i\theta}$

$$z = 1 + i = re^{i\theta} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

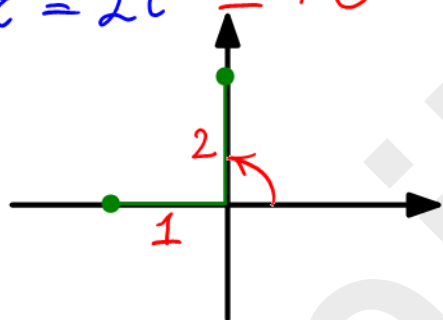


$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

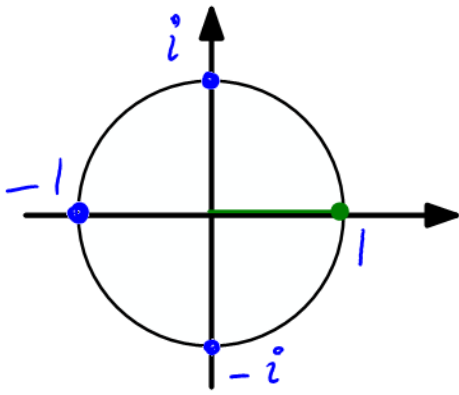
$$z = \sqrt{3}i - 1 = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



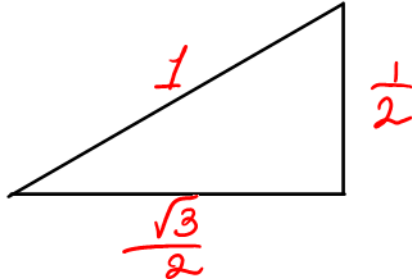
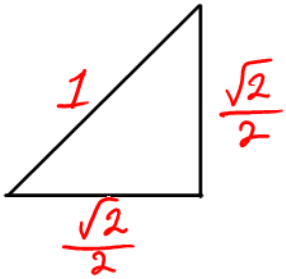
$$z = 2i = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$



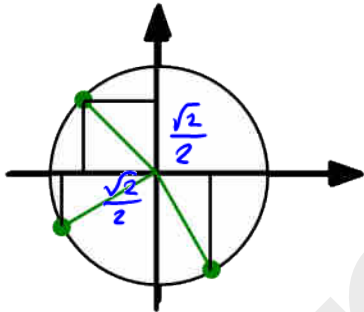
$$z = -1 = 1e^{i\pi}$$



$e^{i\theta}$ نقطه‌ای روی دایره واحد است. دین زاویه θ



$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = \text{cis } \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \checkmark$$



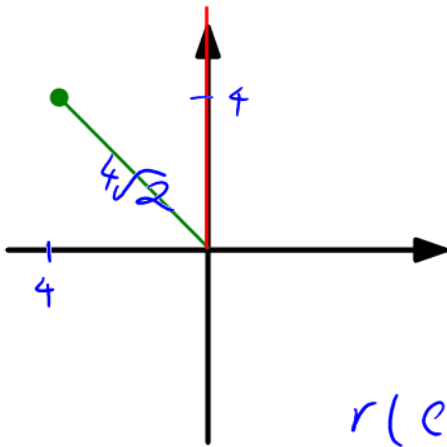
$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

$$2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$re^{i\theta} \longleftrightarrow x + iy$$

تست: نمایش مثلثاتی عدد مختلط $-4 + 4i$ به چه صورتی است؟ (۹۷/۱۰)



$$r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

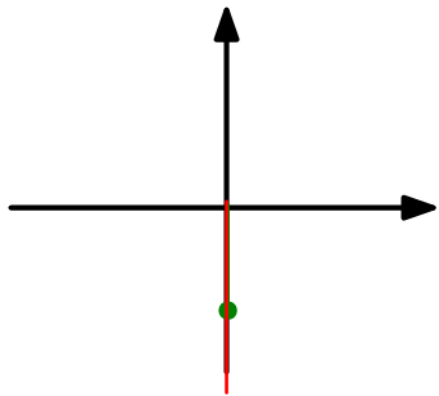
$$4\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \quad (۱)$$

$$4\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}) \quad (۲)$$

$$4(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}) \quad (۳)$$

$$4(\cos \pi - i \sin \pi) \quad (۴)$$

uniland.ir



تست: فرم مثلثاتی $-i$ کدام است؟ (۹۵/۱۰)

(۱) $-\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

(۲) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

(۳) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

(۴) $\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2}$

uniland.ir

تست: اگر $z_1 = 7(\cos 2 + i \sin 2)$ و $z_2 = 7(\cos 3 + i \sin 3)$ باشد، حاصل $Arg(z_1^{20} z_2^5)$ کدام

$\theta = ?$

$7e^{i3}$

$7e^{i2}$ (۹۵/۱۰)

است؟

45 (۱)

55 (۲)

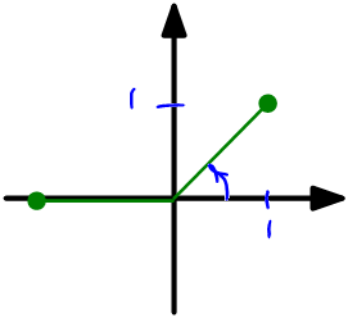
6 (۳)

25 (۴)

$(e^{i2})^{20}$ $(e^{i3})^5$
 e^{i40} e^{i15}
 e^{i55}

uniland.ir

تست: حاصل $(1+i)^{12}$ کدام است؟ (۹۷/۱۰ و ۹۶/۱۰)

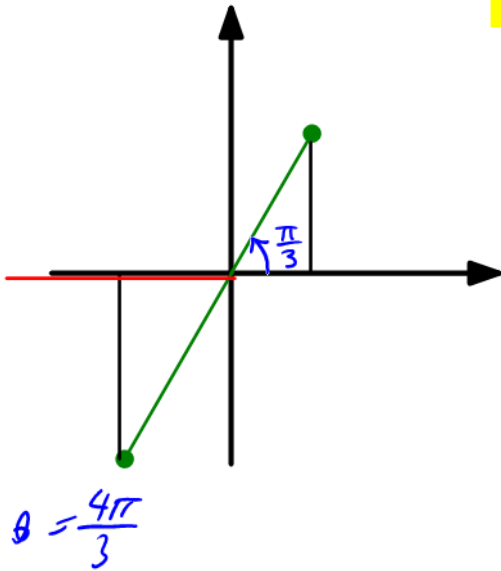


$$(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{12} = 2^6 e^{3i\pi}$$

- ~~-2^6~~ (۱)
- ~~-3^6~~ (۲)
- 2^6 (۳)
- ~~3^6~~ (۴)

uniland.ir

تست: حاصل عبارت $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{60} (-1 - i\sqrt{3})^{12}$ کدام است؟ (۹۸/۴)



- 2⁵ (۱)
- 2⁴⁸ (۲)
- 2¹² (۳)
- 2⁶⁰ (۴)

$$(1 e^{i\frac{\pi}{3}})^{60} (2 e^{i\frac{4\pi}{3}})^{12}$$

$$2^{12} \frac{e^{i20\pi}}{1}$$

$$\frac{e^{i16\pi}}{1}$$

uniland.ir

تست: حاصل $(\cos 5 + i \sin 5)^{12}$ کدام است؟ (۹۷/۴)

e^{i5}

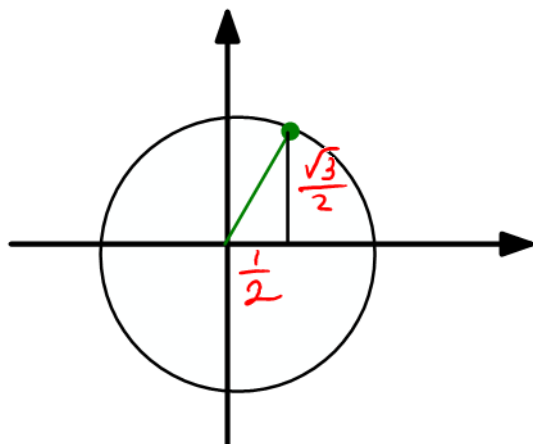
$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ (۳)

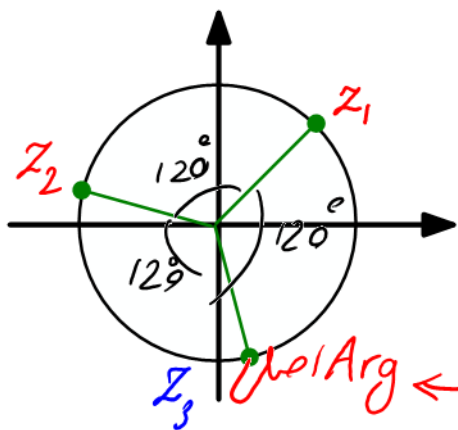
$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ (۴)

$e^{i60^\circ} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$



uniland.ir

تشریحی: اگر $z = -1 + i$ باشد آنگاه $\sqrt[3]{z}$ را بیابید و آن‌ها را روی دایره نمایش دهید. (۹۶/۳)



$$\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$2^{\frac{1}{6}} (\text{cis } \frac{\pi}{4}) = 2^{\frac{1}{6}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$\left(\sqrt{2} e^{i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}$$

$r = 2^{\frac{1}{6}}$
 $k=0 \Rightarrow 45^\circ$

$k=1 \Rightarrow 165^\circ$

$k=2 \Rightarrow 285^\circ$

عدد مرتبه یکدیگر را

$k=1$
 $r = 2^{\frac{1}{6}}$

$$z = 2^{\frac{1}{6}} \text{cis } 165^\circ = 2^{\frac{1}{6}} (\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$$

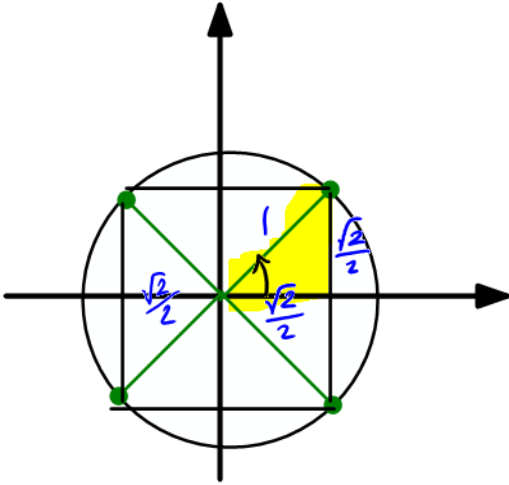
تشریحی: معادله $z^4 + 16 = 0$ را حل کنید. (۹۷/۴)

$$z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} \Rightarrow \text{چهار مقدار دارد.}$$

$$z = \left(16 e^{i(\pi + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{4}} = 2 e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} = 2 e^{i(45^\circ + 90^\circ k)}$$

$$2\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

$$z^4 + 4 = 0 \Rightarrow \pm 1 \pm i$$

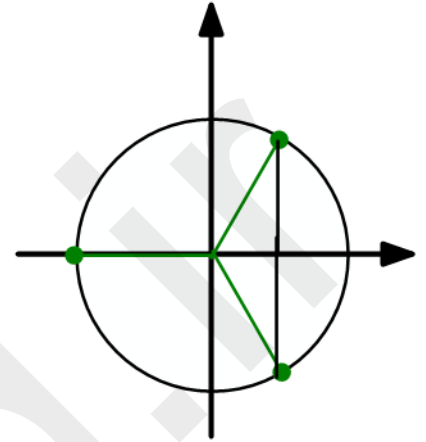


$$z^3 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \left(1 e^{i(\pi + 2k\pi)}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i \frac{(2k+1)\pi}{3}}$$

$$k=0 \Rightarrow z_0 = e^{i \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow z_1 = e^{i\pi} = -1$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = e^{i \frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



تشریحی: معادله $z^4 = 0$ را در اعداد مختلط حل کنید. (۹۷/۱۰)

همه ریشه‌ها صفر هستند

$$(re^{i\theta})^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}}$$

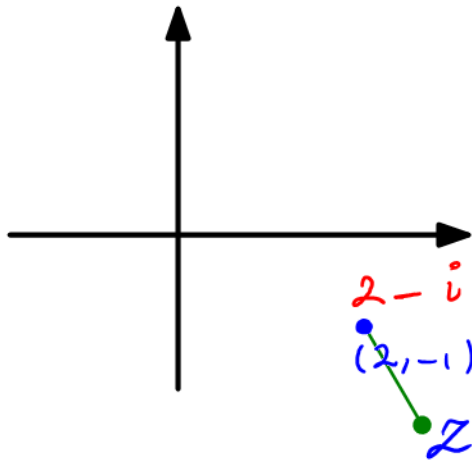
$r=0$ θ کتفه

سادگی ۴، دارای چهار ریشه است

$$|z - z_0| = R$$

فاصله از z_0 برابر است

تست: معادله دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و شعاع 1، در صفحه مختلط کدام است؟ (۹۵/۱۰)



~~$|z - i + 1| = 3$ (۱)~~

~~$|z - i + 1| = 4$ (۲)~~

~~$|z - i| = 2$ (۳)~~

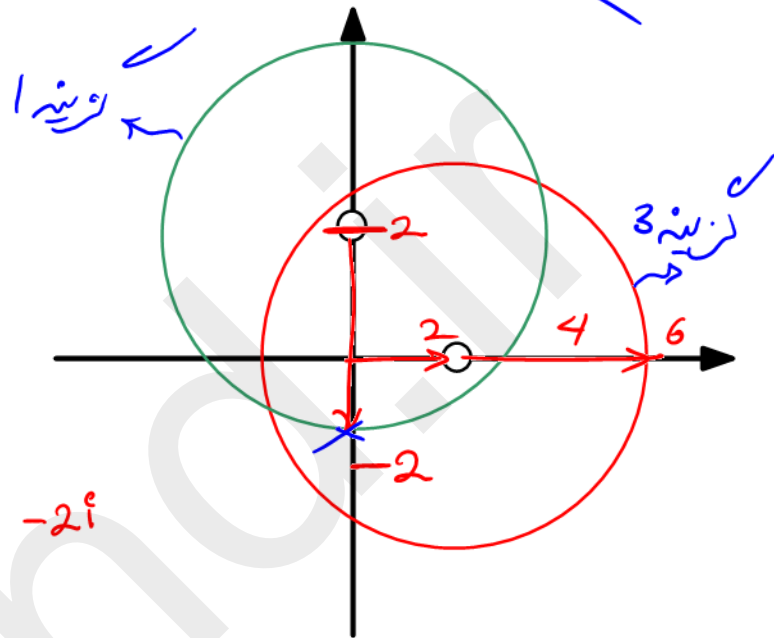
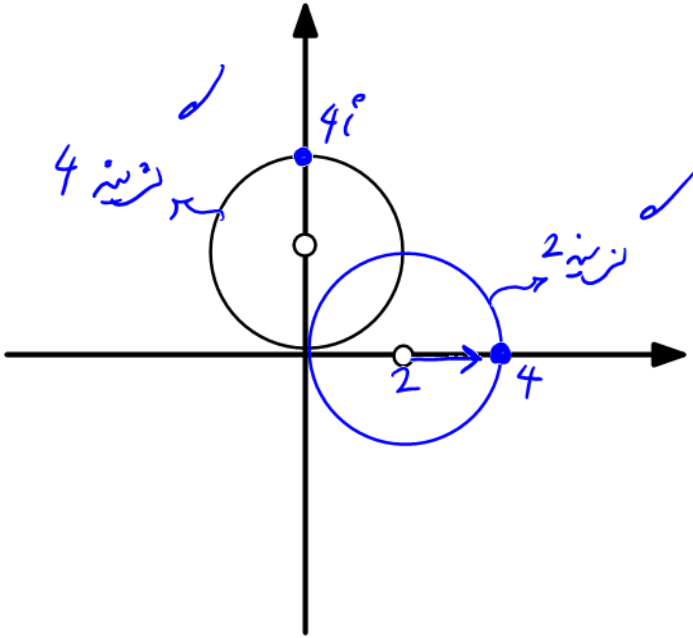
$|z - 2 + i| = 1$ (۴)

$|z - \text{مرکز}| = 1$
 $|z - (2 - i)| = 1$

تست: چنانچه $z = x + iy \neq 0$ نمودار $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$ کدام است؟ (۹۸/۴)

$$Re\left(\frac{1}{-2i}\right) = Re\left(\frac{i}{-2i^2}\right) = Re\left(\frac{i}{2}\right)$$

- (۱) دایره‌ای به مرکز $(0,2)$ و شعاع ۴
- (۲) دایره‌ای به مرکز $(2,0)$ و شعاع ۲
- (۳) دایره‌ای به مرکز $(2,0)$ و شعاع ۴
- (۴) دایره‌ای به مرکز $(0,2)$ و شعاع ۲

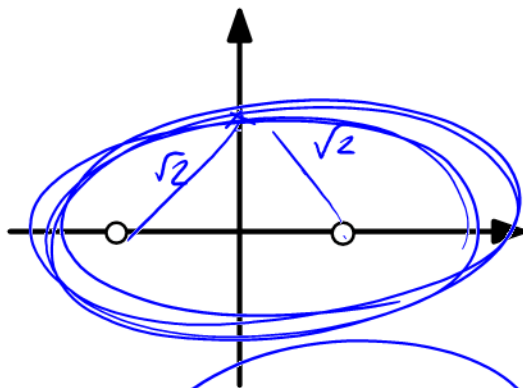


تست: معادله $|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}$ نمایش دهنده چه شکلی در صفحه مختلط می باشد؟

(۹۴/۱۰)

فاصله z از نقطه ۱

فاصله z از -۱



(۱) دایره

(۲) بیضی

(۳) خط

(۴) سهمی

معادله $|z - 1| + |z - (-1)| = 2\sqrt{2}$ عدد صحیح

درسنامه ۳: توابع هایپربولیک

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟
از ۹۶ به بعد هواره یک تست ساده از این درسنامه طرح شده است.

uniland.ir

معرفی توابع هایپربولیک

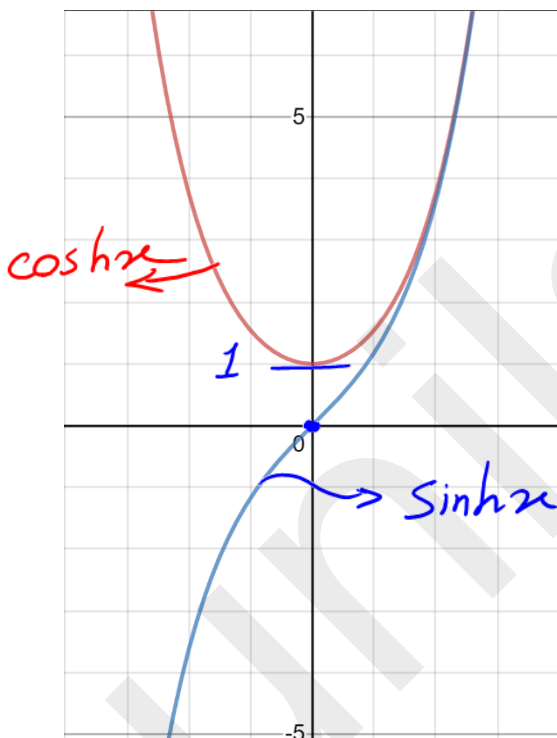
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

توی e^x عکس e^{-x}



تست: مقدار $\cosh(0)$ کدام است؟ (۹۷/۴)

- ۱) صفر
- ۲) -1
- ۳) 1
- ۴) 2

$$\frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

تست: کدام یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟ (۹۵/۳)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (۱)$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (۲)$$

$$\frac{e^x + 1}{e^x} \quad (۳)$$

$$\frac{e^x}{e^x - 1} \quad (۴)$$

ترکیب هایپربولیک و لگاریتم

$$e^{a \ln b} = b^a$$

تست: مقدار $\cosh(\ln 1)$ کدام است؟ (۹۶/۱۰)

$$\cosh(\ln 1) = \frac{e^{\ln 1} + e^{-\ln 1}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

تستی: e (۱)
2 (۲)
صفر (۳)
1 (۴)

تست: مقدار $\tanh(\ln 5)$ کدام است؟ (۹۷/۱۰ و ۹۸/۴)

$$\tanh \ln 5 = \frac{\sinh \ln 5}{\cosh \ln 5} = \frac{\frac{5 - \frac{1}{5}}{2}}{\frac{5 + \frac{1}{5}}{2}} = \frac{5 - \frac{1}{5}}{5 + \frac{1}{5}} = \frac{25 - 1}{25 + 1} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

تستی: $\frac{12}{13}$ (۱)
 $\frac{13}{12}$ (۲)
 $\frac{1}{5}$ (۳)
5 (۴)

تشریحی: حاصل $\sinh(2 \ln 2)$ را بدست آورید.

$$\sinh(2 \ln 2) = \frac{e^{2 \ln 2} - e^{-2 \ln 2}}{2} = \frac{2^2 - \frac{1}{4}}{2}$$

$$\frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

تست: کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (1)
- $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$ (2)
- $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$ (3)
- $\cosh x - \sinh x = 1$ (4)

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$x = \ln 2$$

درسنامه ۴: مشتق

تو مشتق حرفه‌ای شو!!

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟
توجه ۱: هر امتحان شامل ۲۰ تست و ۵ سوال تشریحی است.
توجه ۲: از ۹۶ به بعد هر تست ۰/۳ نمره و هر سوال تشریحی ۱/۲ نمره دارد.

۹۵-۳	۹۵-۱۰	۹۶-۳	۹۶-۱۰	۹۷-۴	۹۷-۱۰	۹۸-۴	
۲/۴	۰/۳	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۰/۶	۰/۹	مجموع
۲/۱	۳/۳	۲/۱	۲/۷	۳	۳	۳	مرتبط

$f(x)$	$f'(x) \equiv$
a	صفر
cx'	x ضرب $\equiv c$
$x^n \neq 1$	nx^{n-1}
e^x	e^x خودش
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$

مشتق $f(x)$

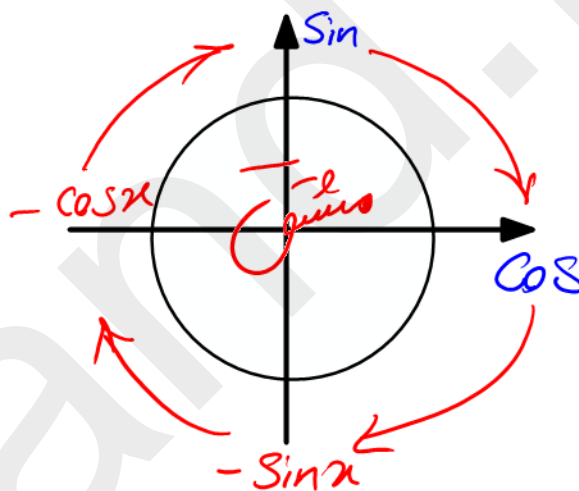
$$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{-1}{x^2}$$

$$x^3 \rightarrow 3x^2$$

$$x^2 \rightarrow 2x^1$$

$$x^{-2} \rightarrow -2x^{-3}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow -x^{-2}$$



$$f \rightarrow f'$$

$$g \rightarrow g'$$

جدول روابط مشتق

تابع	مشتق
cf	
$f \pm g$	
$f \cdot g$	
$\frac{1}{f}$	
$\frac{f}{g}$	
$f(g(x))$	
f^g	

$$cf \rightarrow cf'$$

$$f + g \rightarrow f' + g'$$
~~$$f \cdot g \rightarrow f' \cdot g'$$~~ غلط

$$f \cdot g \rightarrow f'g + fg'$$

$$\frac{1}{f} \rightarrow -\frac{f'}{f^2}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = 2x^3 - 2x\sqrt{x} + 1$$

$$x\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} x = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 2(3x^2) - 2\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) + 0 = 6x^2 - 3\sqrt{x}$$

$$f(x) = x \sin x = \sin x + x \cos x$$

\swarrow \searrow
 1 $\cos x$

$$f(x) = e^x \cos x \implies f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$f(x) = xe^x - x, f'(1) = ? \quad (96/13)$$

$$f'(x) = (xe^x)' - 1 = xe^x + e^x - 1 \xrightarrow{x=1} 2e - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \implies f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \implies f'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{f}{g} \longrightarrow \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\xrightarrow{\text{red circle}} \cos x$
 $\xrightarrow{\text{red circle}} -\sin x$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$f(x) = \sin(x^2)$$

$$(f \circ g)' = (f(g(x)))' ?$$

$$\cos(x^2) (2x)$$

$$f(x) = e^{\cos x}$$

$$e^{\cos x} (-\sin x)$$

$$f(x) = \cos(5x) + e^{2x} - e^{-x}$$

$$(e^{mx})' = m e^{(mx)}$$

$$(\sin nx)' = n \cos(nx)$$

$$f'(x) = -\sin(5x) \times 5 + e^{2x} \times 2 + e^{-x}$$

$$f(x) = \sqrt{5x} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5x}} \times 5 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{u} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{x^2+1} \times 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$f(x) = \cosh(\cos x)$$

(95/3)

$$(\sinh(\cos x))' (-\sin x)$$

$$f(x) = e^{x^3+2x} \quad (96/3)$$

$$f'(x) = e^{x^3+2x} (3x^2+2)$$

$$f(x) = e^{\sin(\sqrt{x})} \quad \xrightarrow{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$e^{\sin(\sqrt{x})} \times \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} =$$

$f(x)$	$f'(x)$
a	
cx	
x^n u^n	$nu^{n-1} \times u'$
e^x e^u	$e^u \times u'$
$\ln x$ $\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sin x$ u	$\cos u \times u'$
$\cos x$ u	$-\sin u \times u'$
$\sinh x$	
$\cosh x$	
$\tan x$	

uniland.ir

تست: مشتق عبارت $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$ کدام است؟ (۹۸/۴)

$$u^2 \rightarrow 2u \times u'$$

$$2 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \quad (۱)$$

$$2 \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) \quad (۲)$$

$$-\sin x \quad (۳)$$

$$-\cos x \quad (۴)$$

$$2 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}\right)$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$$

-1

$x=0$

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 &= \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 1 - \sin x \end{aligned}$$

(۹۸/۴)

تست: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ 8 - x & x \geq 3 \end{cases}$ کدام مورد درست است؟

۱ $f'_-(3) = f'_+(3)$

۲ $f'_-(3) = -f'_+(3)$

۳ $f'_-(3) = -2f'_+(3)$

۴ $f'_-(3) = 2f'_+(3)$

$f'_-(3) \quad x < 3$

$f'_+(3) \quad x > 3$

uniland.ir

تست: چنانچه $g(x) = f(\sin 2x)$ و $g'(0) = 1$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (۹۸/۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) 1
- (۴) -1

$$g(x) = \cancel{f(\sin 2x)}$$

$$g'(x) = f'(\sin 2x) \times \cos(2x) \times 2$$

$$g'(0) = f'(0) \times 1 \times 2 \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

تست: اگر $f'(1) = f(1) = -2$ و $g'(-2) = 3$ باشد، حاصل $(g \circ f)'(1)$ کدام است؟

(۹۵/۱۰)

$$g \circ f(x) = \cancel{g(f(x))}$$

$$(g \circ f(x))' = g'(f(x)) \times f'(x)$$

$$(g \circ f)'(1) = g'(\underbrace{f(1)}_{-2}) \times \underbrace{f'(1)}_{-2}$$

3 -2

-1 (۱)

3 (۲)

-2 (۳)

-6 (۴)

تست: اگر $f(x) = (x-1)^3 \sqrt{2-x}$ باشد، آنگاه $f'(1)$ کدام است؟

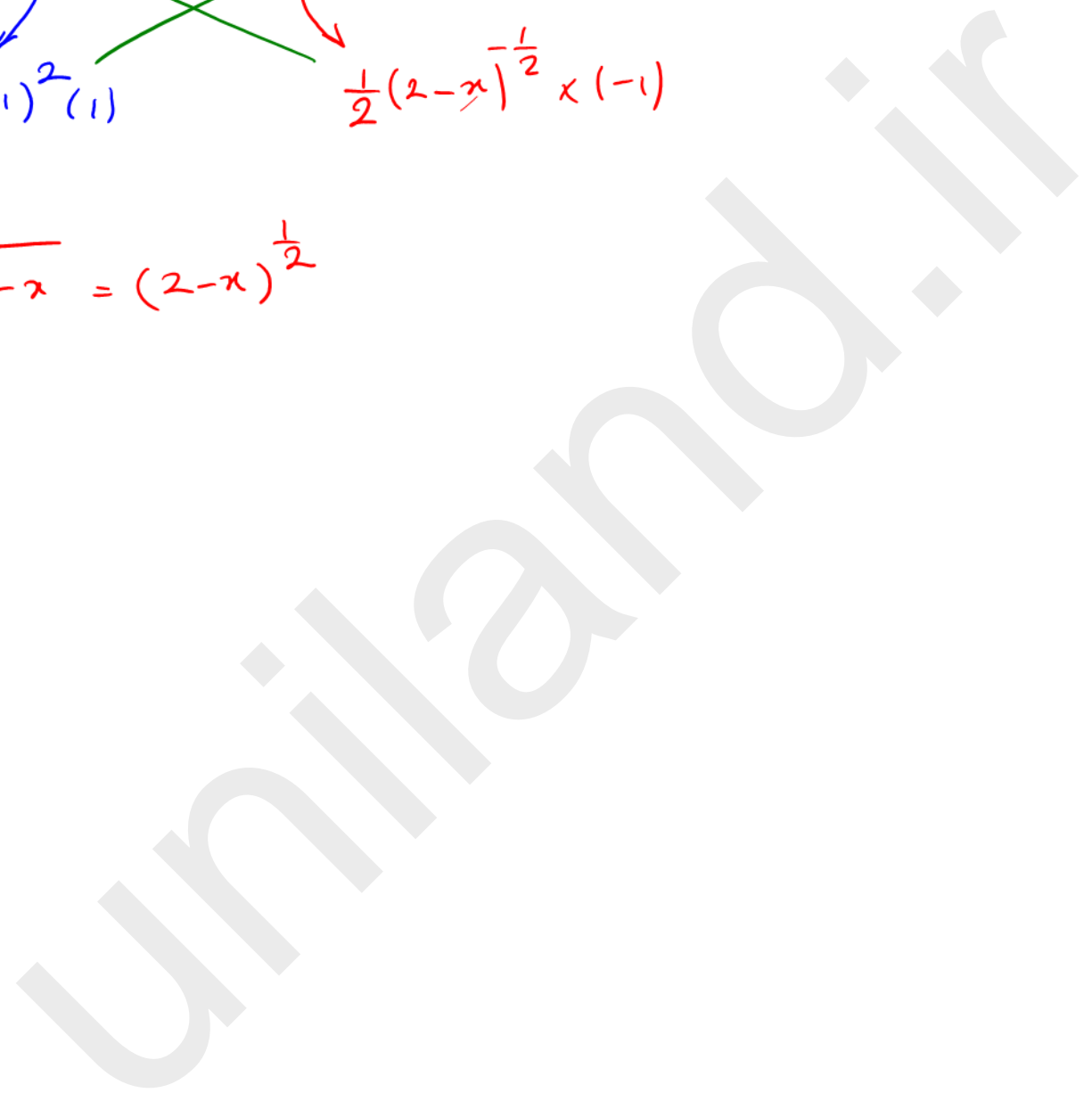
- 0 (۱)
- $\frac{1}{2}$ (۲)
- $\frac{1}{3}$ (۳)
- $-\frac{1}{3}$ (۴)

$$(x-1)^3 \sqrt{2-x} = 0 + 0 = 0$$

Handwritten work for the derivative:

$$3(x-1)^2 (1) + \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}} \times (-1)$$

$$\sqrt{2-x} = (2-x)^{\frac{1}{2}}$$



تست: اگر f تابعی مشتق پذیر باشد و به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $e^{f(x)} = x$

(۹۶/۳)

آنگاه $f'(x)$ کدام است؟

$$e^{f(x)} = x$$

- x (۱)
- $\ln x$ (۲)
- $\frac{1}{x}$ (۳)
- $\ln(\frac{1}{x})$ (۴)

$$a^b = c \iff b = \log_a c$$

$$e^{f(x)} = x \iff f(x) = \log_e x = \ln x$$

~~$e^{f(x)} = x$~~ \implies $e^{f(x)} \cdot x f'(x) = 1$

(Note: In the original image, there are handwritten annotations above the arrow: a small 'd' above the arrow, and 'تفاضل' and 'ضرب' written vertically on either side of the arrow.)

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f^g = e^{g \ln f}$$

مثال: مشتق $f(x) = a^x$ را محاسبه کنید.

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

$$f'(x) = e^{x \ln a} \times \ln a = \underline{a^x \times \ln a}$$

(۹۷/۴)

تست: مشتق تابع $y = 5^{3x+4}$ کدام است؟

$(cx+d)$

$$y = e^{(3x+4) \ln 5}$$

$$y' = \left(\frac{e^{3x+4}}{5^{3x+4}} \right) \times 3 \ln 5$$

$$y' = 3 \times 5^{3x+4} \quad (۱)$$

$$y = 3 \times 5^{3x+4} \times \frac{1}{\ln 5} \quad (۲)$$

$$y' = \underline{3 \times 5^{3x+4}} \times \ln 5 \quad (۳)$$

$$y' = 5^{3x+4} \times \ln 5 \quad (۴)$$

مثال: مشتق $f(x) = x^x$ را محاسبه کنید.

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^x = x^x \times (x \ln x)'$$

$$f'(x) = x^x (1 + \ln x)$$

(۹۶/۱۰)

تشریحی: مشتق تابع $y = (x^2 + x)^{3x}$ را بدست آورید.

$$y = e^{3x \ln(x^2 + x)}$$

$$y' = (x^2 + x)^{3x} \times (3x \ln(x^2 + x))'$$
$$\frac{u'}{u} = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$$

$$y' = 3(x^2 + x)^{3x} \times \left(x \frac{2x + 1}{x^2 + x} + \ln(x^2 + x) \right)$$

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

تست/تشریحی: مشتق معادلات پارامتری $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t + 1 \end{cases}$ کدام است؟ (۹۷/۴ و ۹۷/۱۰)

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \equiv \text{مشتق } f \text{ نسبت به } x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\text{مشتق } y \text{ نسبت به } t}{\text{مشتق } x \text{ نسبت به } t}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{t^2}} \times \frac{t^2}{t^2} = \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

$$\frac{t^2}{t^2 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{t^2 - 1}{t^2} \quad (2)$$

$$\frac{t^2 + 1}{t^2} \quad (3)$$

$$\frac{t^2}{t^2 + 1} \quad (4)$$

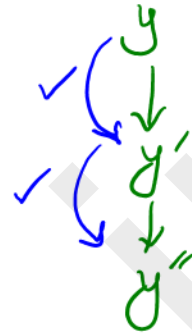
تشریحی: حاصل $\frac{d^2y}{dx^2}$ را برای معادله پارامتری $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ بدست آورید. (۹۵/۳)

مشتق دوم را بر حسب x یا دوبار مشتق

مشتق بر حسب x

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)y$$

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} y = \frac{d^2}{dx^2} y = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$



$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \\ y' = \frac{1-3t^2}{1-2t} \end{cases}$$

$$\frac{-6t(1-2t) + 2(1-3t^2)}{(1-2t)^2} = \frac{-6t + 12t^2 + 2 - 6t^2}{(1-2t)^2}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

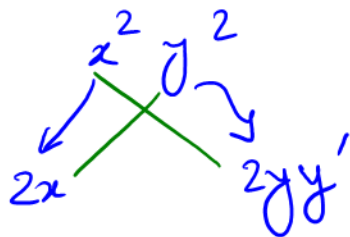
$$y'' = \frac{-6t + 12t^2 + 2 - 6t^2}{(1-2t)^3}$$

$f(x, y) = 0$ هر مثل است

تست: تابع $y = f(x)$ به طور ضمنی به وسیله $x^4 + y^4 = x^2y^2$ داده شده است. y' کدام است؟ (۹۷/۴)

$$x^4 + y^4 = x^2y^2$$

$$4x^3 + 4y^3 y' = 2x^2 y y' + 2xy^2$$



$$(4y^3 - 2x^2 y) y' = 2xy^2 - 4x^3 \Rightarrow y' = \frac{2xy^2 - 4x^3}{4y^3 - 2x^2 y} \times \frac{-1}{-1}$$

~~$$\frac{4y^3 - 2yx^2}{4x^3 - 2xy^2} \quad (1)$$~~

~~$$\frac{4x^3 - 2xy^2}{4y^3 - 2yx^2} \quad (2)$$~~

~~$$\frac{2yx^2 + 4y^3}{4x^3 - 2xy^2} \quad (3)$$~~

$$\frac{4x^3 - 2xy^2}{2yx^2 - 4y^3} \quad (4) \quad \checkmark$$

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟
از ۹۶ به بعد همواره یک تست ساده از این درسنامه طرح شده است.

uniland.ir

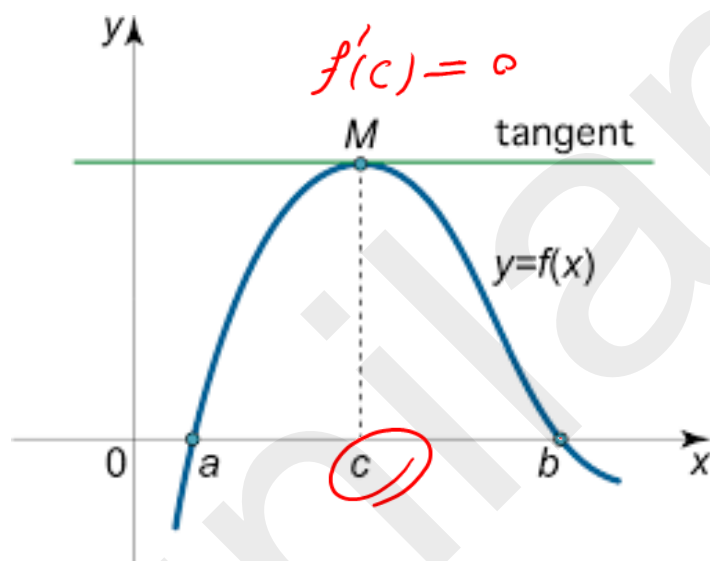
قضیه رول $f'(c) = 0$

تست: اگر عدد c مربوط به قضیه رول در مورد تابع $f(x) = x \cos x + 1387$ در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ باشد، آنگاه $tg(c)$ برابر کدام است؟ (۹۷/۴)

$$f'(x) = -x \sin x + \cos x$$

$$-c \sin c + \cos c = 0 \Rightarrow c \tan c = 1$$

- (۱) c
- (۲) $c + 1$
- (۳) $\frac{1}{c}$
- (۴) $\frac{1}{c} + 1$



(۹۷/۱۰)

تست: کدام مورد جزء شرایط قضیه رول نمی‌باشد؟

$$f(a) = f(b)$$

c برابر

- (۱) در فاصله باز (a, b) مشتق پذیر باشد.
- (۲) در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته باشد.
- (۳) مقدار تابع به ازای مقادیر ابتدا و انتهای باز صفر باشد.
- (۴) در فاصله باز (a, b) انتگرال پذیر باشد.

(۹۸/۴)

تست: کدام یک در شرایط قضیه رول صدق می‌کند؟

~~$f(x) = [x] + 1 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (۱)$~~

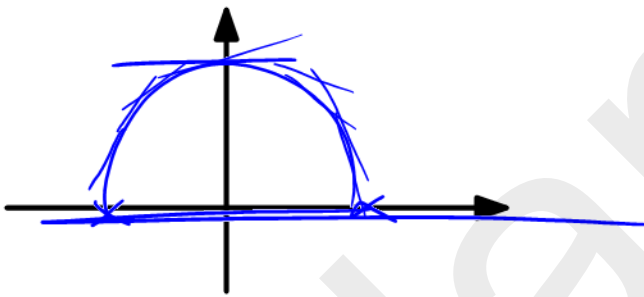
~~$f(x) = |x| + 1 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (۲)$~~

~~$f(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (۳)$~~

$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (۴)$

$f(-1) \neq f(1)$

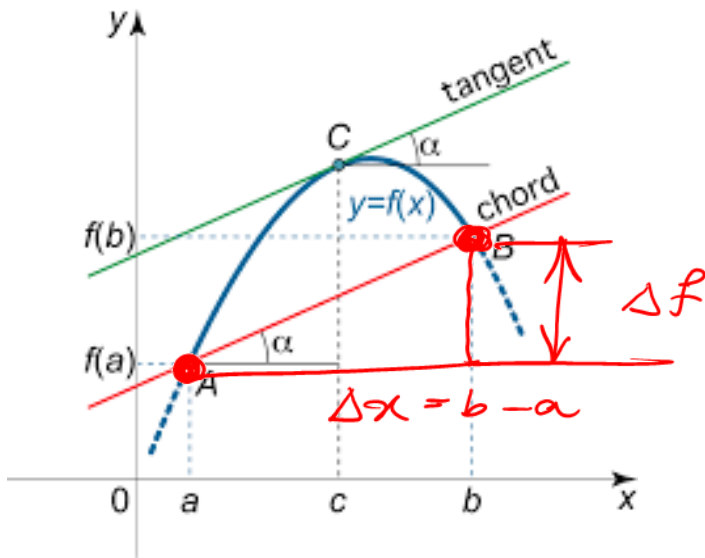
$| -1 | + 1 = | 1 | + 1 \quad \checkmark$



$y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

قضیه مقدار میانگین



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تست: مقدار C مربوط به قضیه مقدار میانگین در مورد تابع $f(x) = \ln x$ در بازه $[1, 3]$ کدام است؟

(۹۷/۱۰)

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(c) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\ln 3 - \ln 1}{3 - 1} = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln 3}{2}$$

$c = 2 \ln 3$ (۱)

$c = \frac{2}{\ln 3}$ (۲)

$c = (\ln 3)^2$ (۳)

(۴) وجود ندارد.

$$\frac{1}{c} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

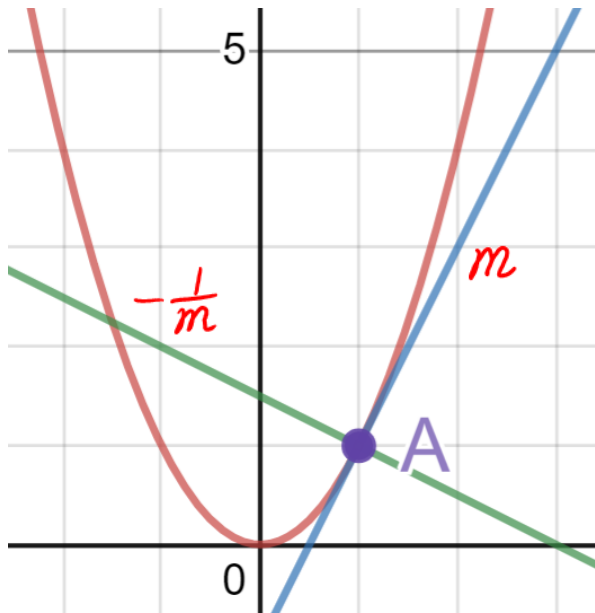
$[a, b]$

درسنامه ۶: کاربرد مشتق

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟ توجه ۱: هر امتحان شامل ۲۰ تست و ۵ سوال تشریحی است. توجه ۲: از ۹۶ به بعد هر تست ۰/۷ نمره و هر سوال تشریحی ۱/۲ نمره دارد.							
۹۵-۳	۹۵-۱۰	۹۶-۳	۹۶-۱۰	۹۷-۴	۹۷-۱۰	۹۸-۴	
۲/۱	۱/۵	۰/۳	۲/۱	۱/۸	۲/۷	۲/۱	نمره

کمترین فاصله	تقریب تابع	شیب خط مماس و عمود
مقدار تقریبی تابع	نقطه عطف	صعودی یا نزولی؟!؟
محاسبه حد	مینیم یا ماکزیم	تعداد ریشه‌ها

شیب خط مماس و عمود



مشتق به بردار مماس A

تست: شیب خط مماس بر تابع $y = x(2e^{-x} - 1)$ در نقطه‌ای به طول صفر کدام است؟ (۹۶/۱۰)

$x = 0$

مشتق

- 2 (۱)
- 2 (۲)
- 1 (۳)
- 1 (۴)

$$y = x(2e^{-x} - 1)$$

Derivative steps shown:

$$-2e^{-x} + 0$$

$$-2xe^{-x} + 2e^{-x} - 1 \Big|_{x=0} = 0 + 2 - 1 = 1$$

تست: ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری با ضابطه‌س $\begin{cases} x = 2t^2 + 4 \\ y = 3t^3 + 9 \end{cases}$ در $t = 1$ کدام است؟

(۹۵/۱۰)

سب
مشق

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{9t^2 + 0}{4t + 0} = \frac{9}{4}$$

۹ (۱)

۴ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۳)

$\frac{4}{9}$ (۴)

uniland.ir

$A(1, 2)$

تست: معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{x-1}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول 1 واقع بر آن کدام است؟ (۹۸/۴)

$y = mx + b$ معادله خط
سویب خط

$y = 2x - 2$ (۱)

$y = \frac{1}{2}(x - 1)$ (۲)

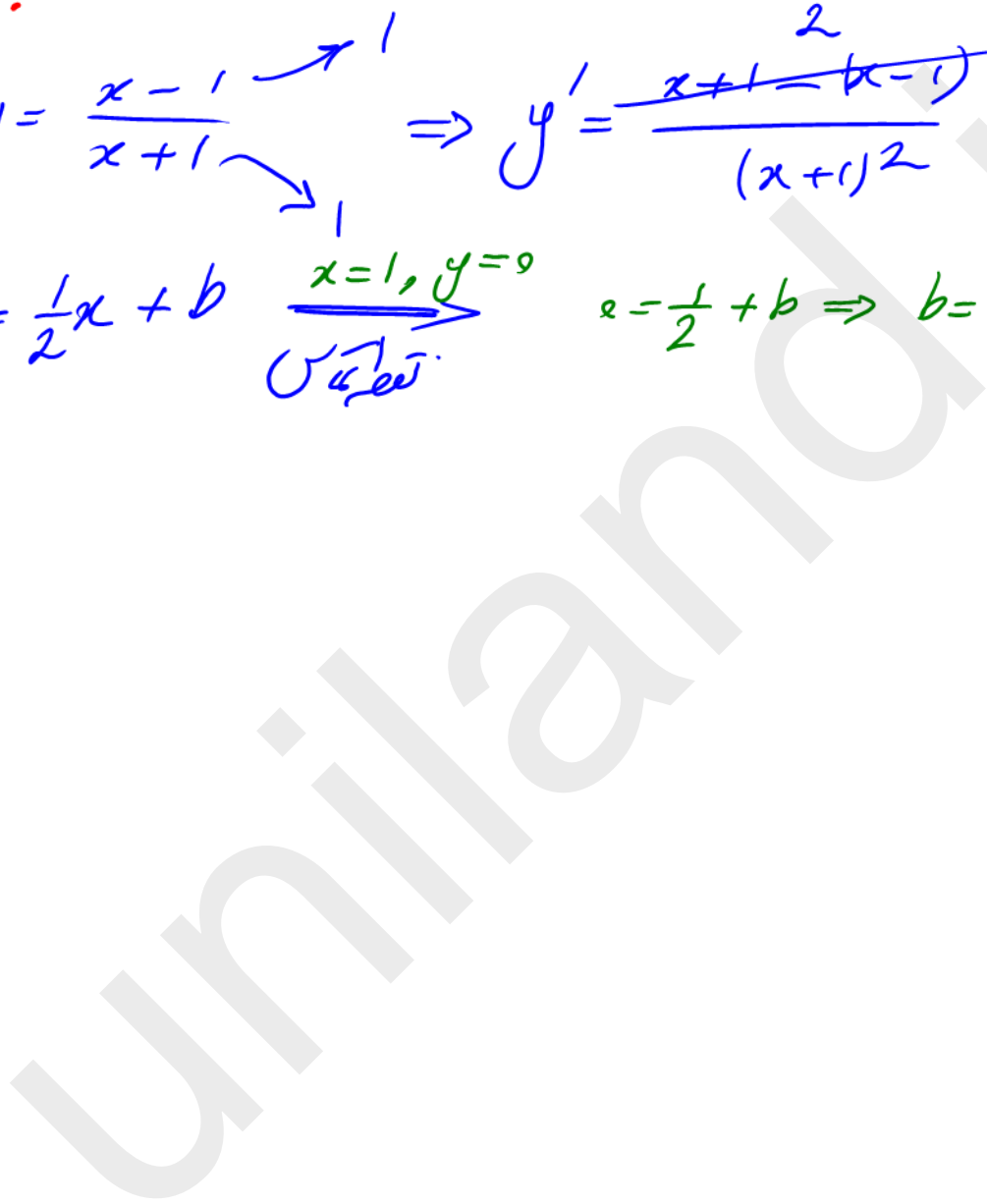
$y = -\frac{1}{2}(x - 1)$ (۳)

$y = -2(x - 1)$ (۴)

$y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$
 $x=1$

$y = \frac{1}{2}x + b$
 $x=1, y=0$
تقریب

$0 = \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$



تست: شیب خط قائم بر منحنی $y = x^2 + 3x - 7$ در نقطه‌ای به طول 2 کدام است؟ (۹۷/۱۰)

شیب قائم بر منحنی $y = x^2 + 3x - 7$ در نقطه‌ای به طول 2

$$y' = 2x + 3 \Big|_{x=2} = 7$$

قرینه دایره محوری عمود $-\frac{1}{7}$

- (۱) 7
- (۲) -7
- (۳) $\frac{1}{7}$
- (۴) $-\frac{1}{7}$

uniland.ir

تست: شیب خط قائم بر منحنی $y = \frac{1}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟ (۹۶/۱۰)

$$y' = \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{4} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} +4$$

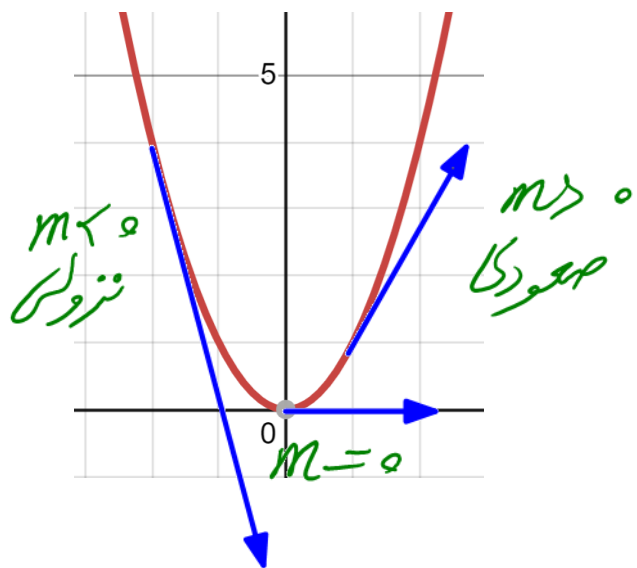
(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) 4

(۳) 2

(۴) -4

uniland.ir

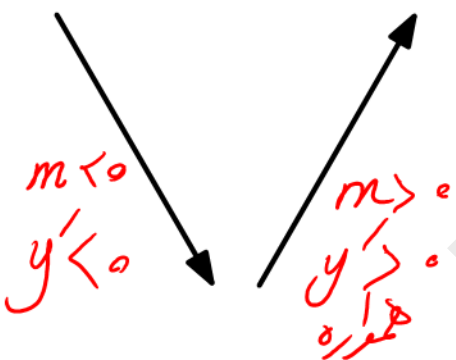


صعودی یا نزولی؟
 علامت مشتق

(۹۵/۱۰)

تست: تابع با ضابطه‌ی $h(x) = \frac{3x}{x^2-4}$

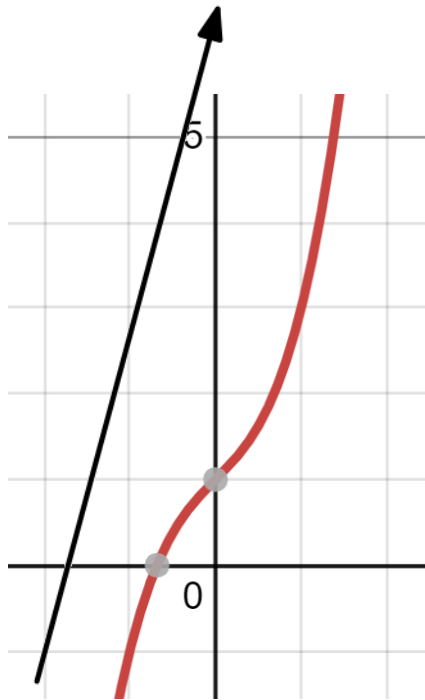
- (۱) همواره نزولی است.
- (۲) همواره صعودی است.
- (۳) نه صعودی و نه نزولی است.
- (۴) هم صعودی و هم نزولی است.



$$y = \frac{3x}{x^2-4} \Rightarrow y' = \frac{3x^2-12-6x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-3x^2-12}{(x^2-4)^2}$$

+

تعداد ریشه‌ها



تست: معادله‌ی $\sin^2 x + 7x = 10$ دارای چند ریشه‌ی حقیقی می‌باشد؟ (۹۵/۱۰)

(۱) صفر ریشه

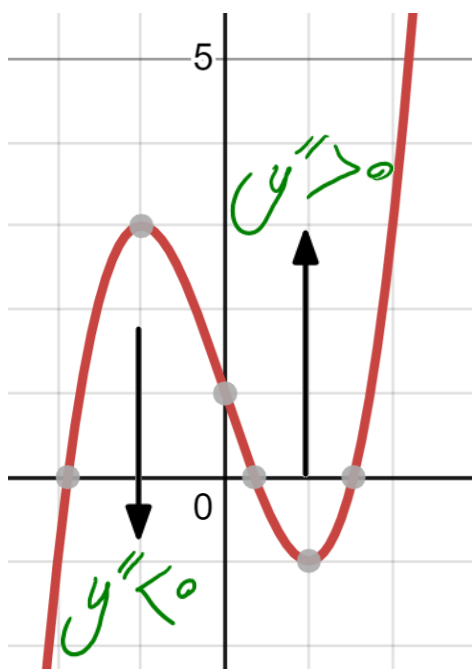
(۲) یک ریشه

(۳) دو ریشه

(۴) سه ریشه

تقعر تابع

علامت مشتق دوم



تست: تابع با ضابطه‌ی $y = 2x^3 - 3x^2$ در کدام یک از بازه‌های زیر محدب می‌باشد؟ (۹۵/۱۰)

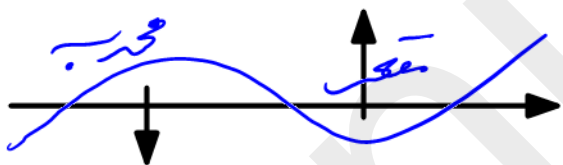
$y'' < 0$

✓ $(0, \frac{1}{2})$ (۱)

~~$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۲)~~

~~$(0, 4)$ (۳)~~

~~$(1, 5)$ (۴)~~



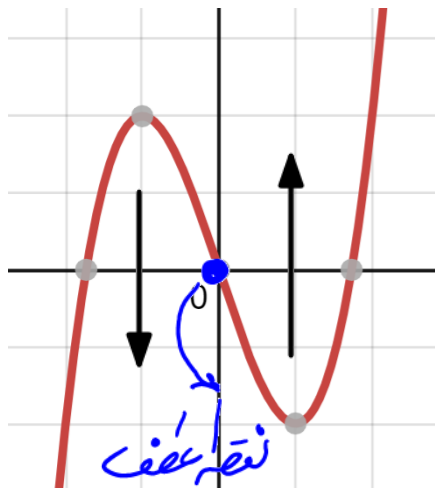
$$y = 2x^3 - 3x^2$$

$$y' = 6x^2 - 6x$$

$$y'' = 12x - 6 < 0 \Rightarrow 12x < 6 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

نقطه عطف

$$y'' = 0$$



تشریحی: مقادیر a و b را طوری بیابید که نقطه $(-1, 1)$ نقطه عطف منحنی $y = ax^3 + bx^2 + 4x + 3$ باشد. (۹۷/۱۰)

$$x = -1 \Rightarrow -a + b - 4 + 3 = 1 \Rightarrow -a + b = 2$$

$$\text{عطف} \Rightarrow y'' \Big|_{x=-1} = 0$$

$$y = ax^3 + bx^2 + 4x + 3$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + 4$$

$$y'' = 6ax + 2b \Big|_{x=-1} \Rightarrow -6a + 2b = 0 \Rightarrow -3a + b = 0$$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ -3a + b = 0 \Rightarrow b = 3a \Rightarrow -a + 3a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

تست: طول نقطه عطف تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ کدام است؟ (۹۶/۳ و ۹۸/۴)

- e (۱)
- e^2 (۲)
- $e^{\frac{3}{2}}$ (۳)
- $e^{\frac{1}{2}}$ (۴)

$$y'' = 0 \Rightarrow x = ?$$

$$y = \frac{\ln x}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4}$$

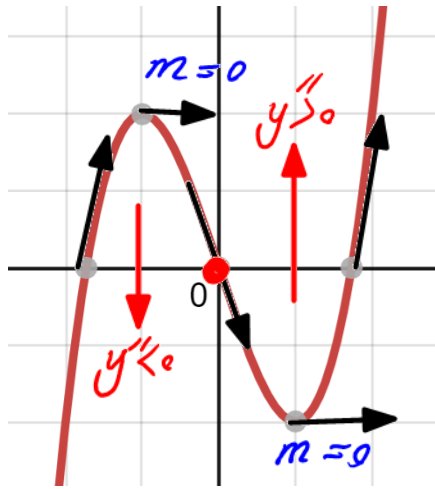
$$x(2 \ln x - 3)$$

$$\ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_e x = \frac{3}{2}$$

اکسترمم: مینیم یا ماکزیمم

$$\underbrace{y'' < 0} \quad \underbrace{y'' > 0} \quad \downarrow$$

$$m = 0$$



آزمودن مشتق دوم

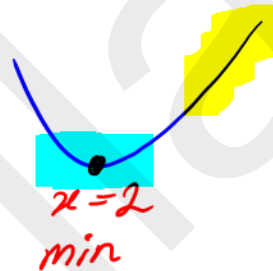
آزمودن مشتق اول

(۹۶/۱۰)

تست: مینیمم مطلق تابع $f(x) = x - 2 \ln x$ در فاصله $[1, e]$ کدام است؟

$$f'(x) = 1 - 2\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - 2 \ln 2$$

$$f''(x) = +\frac{2}{x^2} > 0$$



- 1 (۱)
- e (۲)
- e - 2 (۳)
- 2 - 2 ln 2 (۴)

$e = 2.7$

تشریحی: اکسترم‌های نسبی تابع $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 25$ را با استفاده از آزمون مشتق اول بدست

آورید. (۹۶/۱۰)

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 + 30x + 36 = 0$$

$$6(x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x+2)(x+3) = 0$$

$$x = -2 \quad x = -3 \Rightarrow \text{Ext.}$$

$$f''(x) = 6(2x+5)$$

$x = -2 \rightarrow f''(-2) > 0 \Rightarrow \cup \Rightarrow \text{min}$

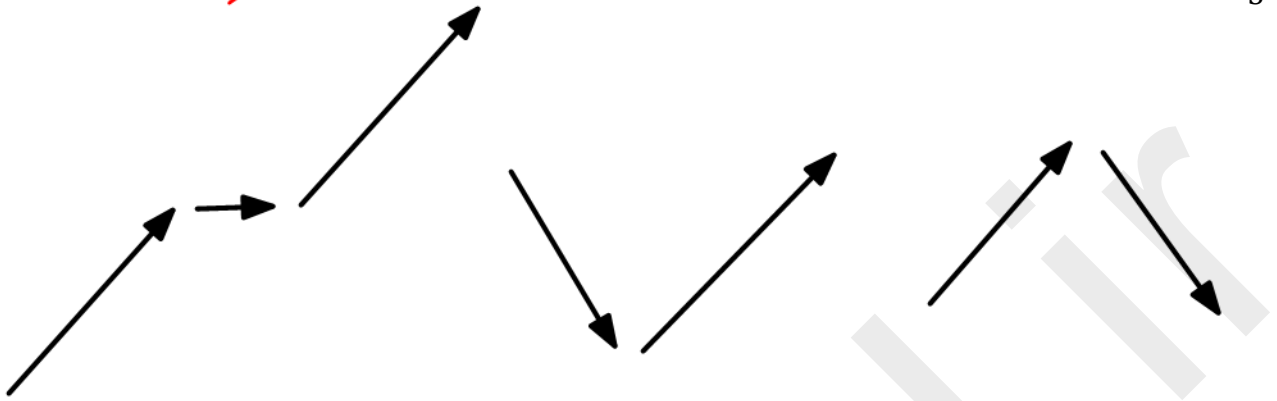
$x = -3 \rightarrow f''(-3) < 0 \Rightarrow \cap \Rightarrow \text{max}$

تست: تابع $f(x) = (x - 1)^3$ چند اکسترمم نسبی دارد؟ (۹۷/۴)

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \times 1 = 0$$

$x = 1$

- 0 (۱)
- 1 (۲)
- 2 (۳)
- 3 (۴)



uniland.ir

(۹۷/۴)

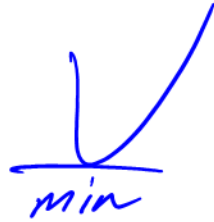
تست: در مورد تابع $f(x) = x^2 - 10$ می‌توان گفت:

- (۱) تابع در ۱ دارای مینیمم نسبی است.
- (۲) تابع در صفر دارای مینیمم نسبی است.
- (۳) تابع در صفر دارای ماکزیمم نسبی است.
- (۴) تابع در یک دارای ماکسیمم نسبی است.

$$f'(x) = 2x$$

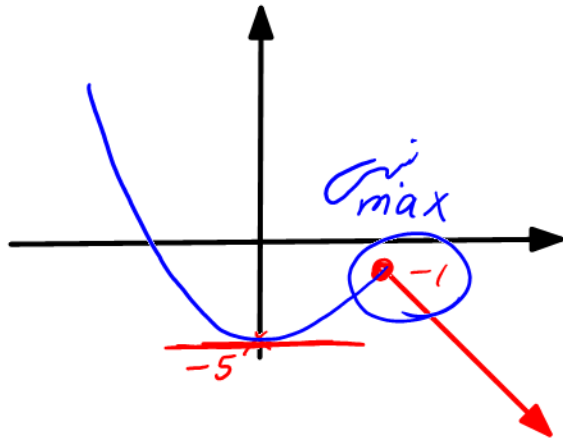
$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 2 > 0$$



uniland.ir

تشریحی: ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & x \geq 2 \\ x^2 - 5 & x < 2 \end{cases}$ را در صورت وجود بدست آورید. (۹۷/۴)



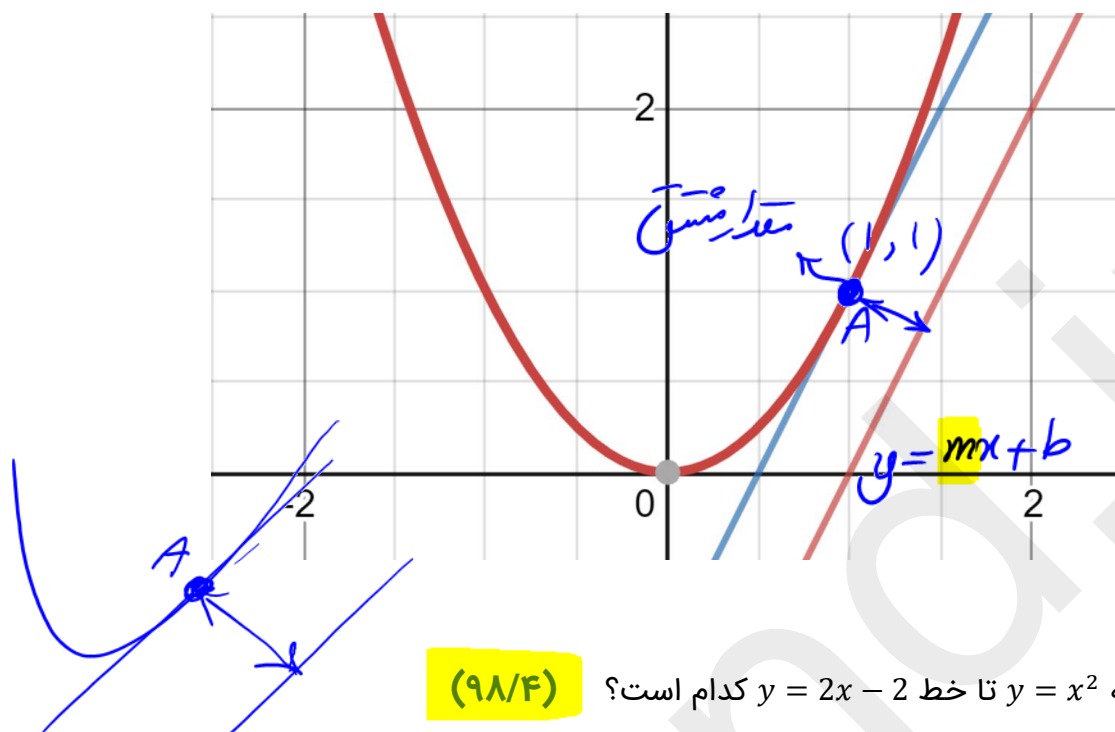
$$f'(x) = \begin{cases} -3 & x > 2 \\ 2x & x < 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$x=0 \text{ نسبی min} \Rightarrow f(0) = -5$$

$$x=2 \text{ نسبی max} \Rightarrow f(2) = -1$$

کمترین فاصله بین یک منحنی و خط



(۹۸/۴)

تست: کمترین فاصله $y = x^2$ تا خط $y = 2x - 2$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(۴) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

پیدا کردن نزدیکترین نقطه: معادله اول

$$y = 2x - 2$$

$$y = x^2$$

$$y' = 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

فاصله نقطه A از خط: معادله دوم
 $y = 2x - 2$

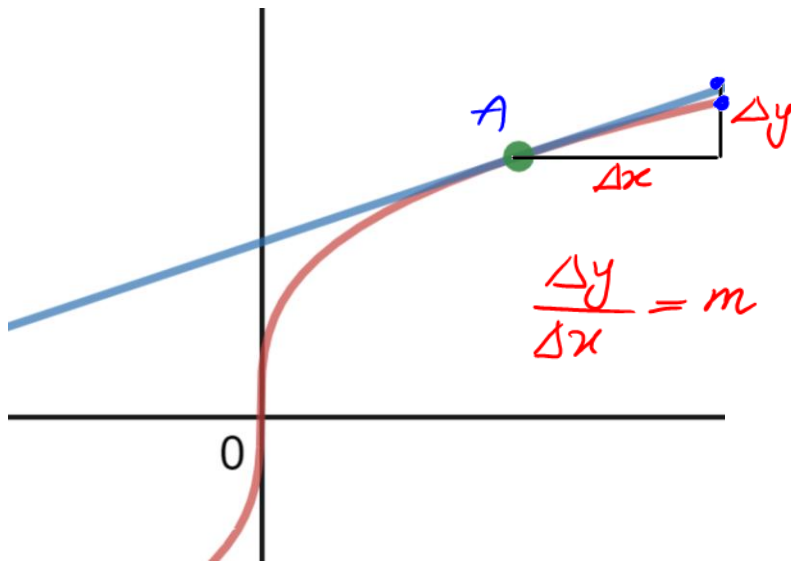
$$ax + by + c = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{|2x - y - 2|}{\sqrt{4 + 1}}$$

$$d = \frac{|2 - 1 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

مقدار تقریبی به کمک خط مماس

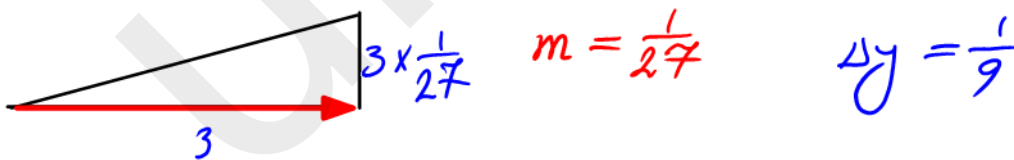


تست: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{30}$ کدام است؟ (۹۵/۱۰)

- 3.1 (۱)
- 3.2 (۲)
- 3.3 (۳)
- 3.4 (۴)

$$\sqrt[3]{27+3} = 3 + \frac{1}{9}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot (3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{27}$$



تشریحی: مقدار تقریبی $\sin 31^\circ$ را بدست آورید. (۹۷/۱۰)

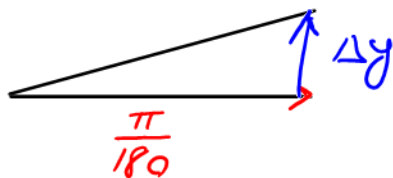
$\frac{\pi}{6}$
 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$1^\circ = \quad \text{rad}$

$180^\circ \quad \pi$
 $1^\circ \quad \theta = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx ?$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \Rightarrow \Delta y = \frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 31^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$

محاسبه حد به کمک مشتق (هویتال)

$$\lim \frac{f'}{g'}$$

$$\lim \frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty}$$

تست: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}$ کدام است؟ (۹۶/۱۰)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = \frac{0}{0} = \#$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

- $\frac{1}{2}$ (۱)
- صفر (۲)
- $+\infty$ (۳)
- 1 (۴)

تست: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ کدام است؟ (۹۵/۱۰)

$$\frac{\pi}{4}$$

+∞ (۱)

1 (۲)

0 (۳)

(۴) وجود ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

$$H \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos 2x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

uniland.ir

جمع‌بندی این درسنامه

$-\frac{1}{m} \xleftarrow{\text{عمود}} m = y'$	شیب خط مماس و عمود
$m < 0$ نزول $m > 0$ صعود	صعودی یا نزولی؟!
عدد ریشه دارد	تعداد ریشه‌ها
$y'' > 0$ لودکا رویه بالا است $y'' < 0$ لودکا رویه پایین	تقعر تابع y''
$y'' = 0$	نقطه عطف
$y' = 0$ نوع اکسترمم max min	اکسترمم مینیمم یا ماکزیمم
	کمترین فاصله بین یک منحنی و خط
	مقدار تقریبی
$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{f}{g} \Rightarrow \lim_{g \rightarrow 0} \frac{f'}{g'}$	محاسبه حد به کمک مشتق $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

درسنامه ۷: محاسبه انتگرال (تابع اولیه)

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از محاسبه انتگرال نمره بگیریم؟ (درسنامه ۷-۸-۹-۱۰)

توجه ۱: هر امتحان شامل ۲۰ تست و ۵ سوال تشریحی است.

توجه ۲: از ۹۶ به بعد هر تست ۰/۷ نمره و هر سوال تشریحی ۱/۲ نمره دارد.

۹۵-۳	۹۵-۱۰	۹۶-۳	۹۶-۱۰	۹۷-۴	۹۷-۱۰	۹۸-۴	
۲/۱	۱/۵	۰/۳	۲/۱	۱/۸	۲/۷	۲/۱	نمره

ارتباط انتگرال و مشتق

$$C + x^2 \xrightarrow{1} 2x + e$$

$$F(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f(x)$$

$$F(x) \xleftarrow{\text{انتگرال}} f(x)$$

..... مشتق x^2 برابر $2x$ است. در نتیجه، انتگرال $2x$ برابر است $x^2 + C$

..... مشتق $\sin x$ برابر $\cos x$ است. در نتیجه، انتگرال $\cos x$ برابر $\sin x + C$

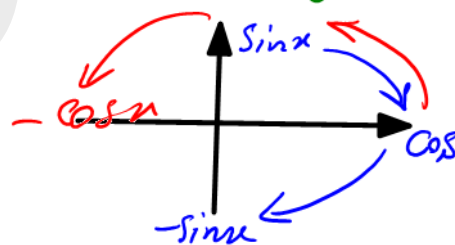
..... مشتق $\ln x$ برابر $\frac{1}{x}$ است. در نتیجه، انتگرال $\frac{1}{x}$ برابر $\ln x + C$

..... مشتق $x^2 + 2$ برابر $2x$ است. در نتیجه، انتگرال $2x$ برابر است $x^2 + C$

$F(x)$	$f(x)$
c	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x+a)$	$\frac{1}{x+a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$$F(x) \xrightarrow{1} f(x) \quad F'(x) = f(x)$$

$$F(x) \xleftarrow{\text{تابع اوله}} f(x) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$



$$\int \cos x dx = +\sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

چگونه بدون علم انتگرال تست انتگرال بزنیم!؟

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

(۹۷/۴)

تست: حاصل $\int \frac{\cos x}{\sin x + 3} dx$ کدام است؟

✓ $\frac{\cos x}{\sin x + 3} \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \ln|\sin x + 3| + c$ (۱)

~~$\ln|\sin x| + c$ (۲)~~

~~$\ln|\cos x| + c$ (۳)~~

~~$\ln|\tan x| + c$ (۴)~~

(۹۶/۳)

تست: حاصل انتگرال $\int 5^x dx$ کدام است؟

$\frac{5^x}{\ln 5} + c$ (۱)

~~$\ln 5 x^{5^x} + c$ (۲)~~

~~$5^x + c$ (۳)~~

~~$5 \cdot 5^x + c$ (۴)~~

~~$\ln 5 x^{5^x}$~~ \xrightarrow{f} 5^x

$\frac{5^x}{\ln 5} \xrightarrow{f} \frac{\ln 5 \cdot 5^x}{\ln 5}$

uniland.ir

(۹۶/۳)

تست: حاصل $\int \sin 3x \sin 2x dx$ کدام است؟

~~X~~ $\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 5x \leftarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + c$ (۱)

~~X~~ $-\sin 3x - \sin 2x \leftarrow \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos 2x + c$ (۲)

✓ $\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos 5x \leftarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + c$ (۳)

~~X~~ $-\sin 2x - \frac{5}{2} \sin 5x \leftarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 5x + c$ (۴)

$\sin 3x \cdot \sin 2x$

@ $\frac{\pi}{2}, c$

$$\int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1}$$

$$\frac{1}{2} \int 2x dx = \frac{1}{2} x^2 = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int 2 dx = 2x + c$$

$$\int (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \rightarrow x\sqrt{x}$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln(x-2) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

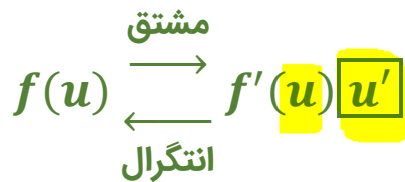
$$\int 5 \sin x dx = 5 \int \sin x dx = -5 \cos x + c$$

$$\int \frac{2}{x^2+1} dx = 2 \tan^{-1} x$$

$$\tan^{-1} x \xrightarrow{f} \frac{1}{x^2+1}$$

دیدگاه رنجیره‌ای (تغییر متغیر سریع)

$\sin u$
 $\cos u$
 u^n
 e^u



$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

$$\int 2x \cos(x^2) \, dx = \sin(x^2) + C$$

$$\int e^{5x} \, dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} (5) \, dx = \frac{1}{5} e^{5x}$$

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\int (2x+1)^5 \, dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^5 \cdot 2 \, dx = \frac{(2x+1)^6}{2 \times 6} + C$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \ln |3x+2| + C$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$
$$\ln u \rightarrow \frac{1}{u} u'$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u$$

متعلق فریب در صورت

لوگاریتم

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} 2x$$

$$\tan^{-1} u \rightarrow \frac{1}{1+u^2} u'$$

$$\int \frac{1}{9+x^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{\frac{1}{3} dx}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3}$$

$$\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x} = \int \cos(u) \frac{1}{x} dx = \sin(\ln x) \quad (9/4)$$

$$f \cos(u) \rightarrow \sin u$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + 3} dx = \ln |\sin x + 3| + C$$

(96/3 و 97/4)

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int u^{\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$$

uniland.ir

$$\int \frac{\cos x}{(5 + \sin x)^5} dx = \int \frac{1}{u^5}$$

Handwritten notes: "u'" above the denominator and "u" below it, with arrows pointing to the terms.

(۹۵/۳)

$$\int u^{-5} = \frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{(5 + \sin x)^{-4}}{-4} + C$$

$$\frac{-1}{6} \int \frac{-6x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{-1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{u}} = ? = \frac{-1}{3} \sqrt{1-x^6}$$

Handwritten notes: "u'" above the denominator and "u" below it, with arrows pointing to the terms.

(۹۵/۱۰)

$$1-x^6 \xrightarrow{f'} -6x^5$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2u^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u}$$

$$\int \frac{\sin x}{u} \frac{\cos x}{u'} dx$$

(95/10)

$$\int u' = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x \cdot \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \sin^2 x + C \quad (2)$$

$$+\frac{1}{2} \sin 2x \leftarrow -\frac{1}{4} \cos 2x + C \quad (3)$$

$$\frac{\sin x \cos x}{2} = \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} \cos^2 x + C \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x \cos x} dx = \frac{-\cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\int \sin^3 x \, dx$$

(۹۵/۳)

$$\int \sin^2 x \sin x \, dx$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$-\int (1 - \underbrace{\cos^2 x}_u) \underbrace{\sin x}_{u'} \, dx$$

$$-\int (1 - u^2) \, du = \int (u^2 - 1) \, du = \frac{u^3}{3} - u$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + c \quad (1)$$

$$\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^4 x}{4} + c \quad (3)$$

$$-\frac{\cos^4 x}{4} + c \quad (4)$$

uniland

کلیه u, u' در انتگرال منگور باشند

تغییر متغیر های مثلثاتی

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $\sqrt[n]{x}$

تست: برای حل انتگرال $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4+x^2}} dx$ کدام تغییر متغیر استفاده می کنیم؟ (۹۶/۱۰ و ۹۷/۱۰)

$$\frac{4+x^2}{1+\frac{x^2}{4}} = 1 + \tan^2 t$$

- $x = 2 \sin t$ (۱)
- $x = 2 \cos t$ (۲)
- $x = 2 \tan t$ (۳)
- $x = 2 \sec t$ (۴)

$$1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \tan^2 t \quad \frac{x}{2} = \tan t$$

$\sqrt{4-x^2} \sin$ $\sec \sqrt{x^2-4}$ $\tan \sqrt{x^2+4}$

تست: تغییر متغیر مناسب برای $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}} dx$ کدام است؟ (۹۵/۳)

- $e^x = 3 \sin \theta$ (۱)
- $e^{2x} = 3 \tan \theta$ (۲)
- $e^{2x} = 3 \sec \theta$ (۳)
- $e^x = 3 \cot \theta$ (۴)

$$\sqrt{9-e^{2x}} = 3^2 - (e^x)^2 = 1 - \sin^2 \theta$$

(۹۶/۳)

تست: برای یافتن $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ کدام تغییر متغیر مناسبتر است؟

~~$x = \sqrt[3]{t}$ (۱)~~

~~$x = \sqrt{t}$ (۲)~~

$x = t^3$ (۳)

$x = t^6$ (۴)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$\sqrt[3]{t^3} = t^{\frac{3}{2}}$$

$$t^3 + t^2$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

تست: حاصل $\int_0^2 (x + 4) dx$ کدام است؟ (۹۷/۴)

$$\int_0^2 (x+4) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^2 = (2+8) - (0) = 10$$

10 (۱)
8 (۲)
4 (۳)
2 (۴)

(۹۶/۳ و ۹۶/۱۰)

تست: حاصل $\int_3^7 \frac{dx}{1+x}$ کدام است؟

- ۲ (۱)
- $\ln 2$ (۲)
- e^2 (۳)
- $\frac{1}{2}$ (۴)

$$\int_3^7 \frac{1 dx}{x+1} = \ln(x+1) \Big|_3^7 = \ln 8 - \ln 4$$
$$= \ln \frac{8}{4} = \ln 2$$

$$\ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

تست: اگر $\int_1^x \frac{1}{t} dt = 1$ مقدار x کدام است؟ (۹۶/۳)

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = 1$$

$$\ln t \Big|_1^x = 1 \Rightarrow \ln x - \ln 1 = 1$$

$$\text{Log}_e x = 1 \Rightarrow x = e^1$$

- e (۱)
- e^{-1} (۲)
- e^2 (۳)
- e^{-2} (۴)

تست: حاصل $\int_{-3}^3 \frac{1}{9+x^2} dx$ کدام است؟ (۹۷/۱۰)

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9} \int_{-3}^3 \frac{\frac{1}{3} dx}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

$$\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3} \Big|_{-3}^3$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1)}{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

- (۱) $\frac{\pi}{6}$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{3}$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

uniland.ir

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟
معمولا یک سوال تشریحی یا تستی از این قسمت طرح می‌شود.

uniland.ir

سوال: چگونه انتگرال‌هایی را می‌توانیم به کمک جزء به جزء محاسبه کنیم؟

دسته شماره ۳	دسته شماره ۲	دسته شماره ۱
نمایی (e^x) مثلثاتی ($\sin x, \cos x$) هایپربولیک ($\sinh x, \cosh x$)	چند جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$	توابع لگاریتمی ($\ln x$)

$$\int \ln(x) dx \quad \int x^2 \ln x dx$$

$\int \textcircled{2} \times \textcircled{1}$

$$\int x e^x dx \quad \int x^2 \sin x dx \quad \int (x^2 + x - 2) \cosh x dx$$

$\int \textcircled{2} \times \textcircled{3}$

$$\int e^x \cos x dx \quad \int \sin x \cosh x dx$$

$\int \textcircled{3} \times \textcircled{3}$

تست: انتگرال $\int x^2 \ln x dx$ با چه روشی حل می‌شود؟ (۹۷/۱۰)

جزء به جزء

- (۱) تغییر متغیر $\textcircled{2}$ جزء به جزء ~~(۳) تجزیه کسر~~ (۴) تغییر متغیر مثلثاتی

$$\sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$x^2 - a^2$$

فرمول انتگرال جزء به جزء

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

$$\int \textcircled{u} \textcircled{v'} dx$$

سوال: انتگرال $\int xe^x dx$ را محاسبه کنید.

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx$$

$$u = x \quad v' = e^x \Rightarrow v = e^x, \quad u' = 1$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x$$

انتگرال ساده تر

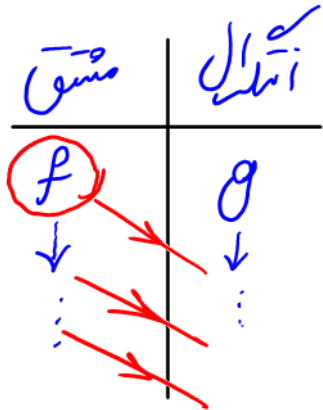
$$u = e^x \quad v' = x \Rightarrow u' = e^x, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int xe^x dx \longrightarrow \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

بسیار بزرگتر

روش جدولی برای محاسبه جزء به جزء

دسته شماره ۳	دسته شماره ۲	دسته شماره ۱
نمایی (e^x) مثلثاتی ($\sin x, \cos x$) هایپربولیک ($\sinh x, \cosh x$)	چند جمله‌ای	توابع لگاریتمی ($\ln x$)

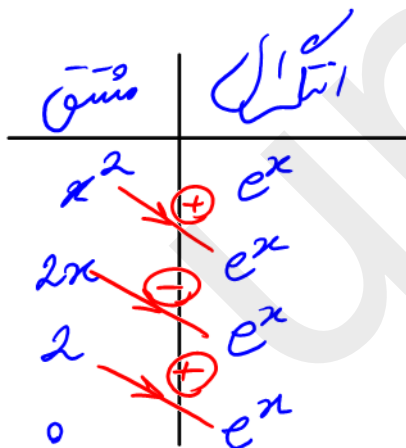


$$\int f \cdot g \, dx$$

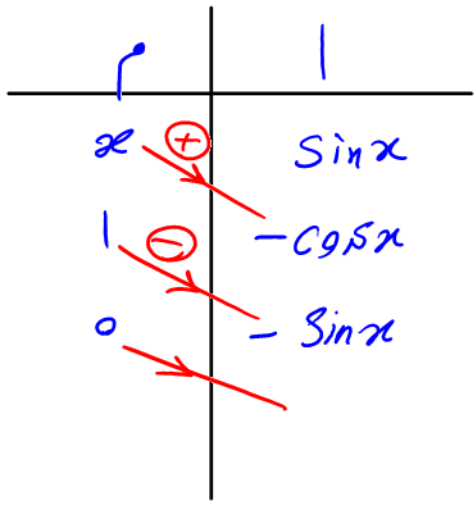
اولویت برای ستون مستوی :

مثال: حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

$$\int x^2 e^x \, dx = +x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$



$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$



uniland.ir

$$\int \underbrace{(x^3 + x)}_{\text{جزء اولی}} \sinh x \, dx \quad \checkmark$$

دسته 3

(95/10)

f	l
$x^3 + x$	$\sinh x$
$3x^2 + 1$	$\cosh x$
$6x$	$\sinh x$
6	$\cosh x$
0	$\sinh x$

uniland.ir

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

(97/10)

u	v
$\ln x$	x^2
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

Diagram illustrating the integration by parts process. The table shows the choice of u and v . A red arrow points from $\ln x$ to $\frac{1}{x}$, and another red arrow points from x^2 to $\frac{x^3}{3}$. A red circle with a plus sign is around $\ln x$, and a red circle with a minus sign is around $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= + \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \end{aligned}$$

$$\int_1^e \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{x} \, dx$$

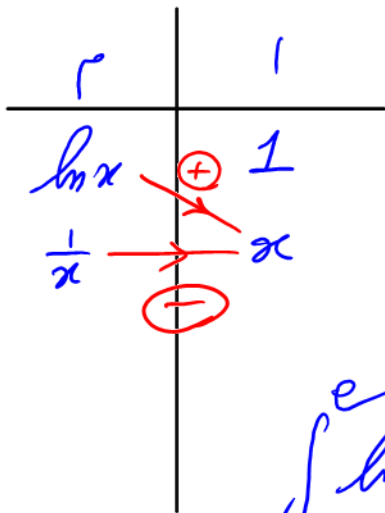
(۹۶/۳ و ۹۷/۱۰)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) e

(۴) e^2

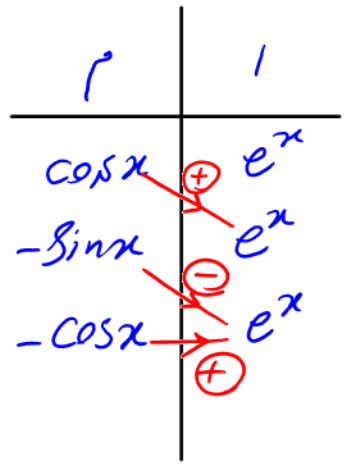


$$\int_1^e \ln x = (x \ln x - x) \Big|_1^e = e \ln e - e - (-1)$$

Log e → 1

uniland.ir

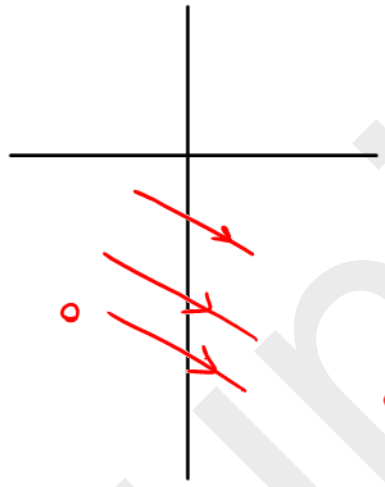
$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad (96/3)$$



$$\Rightarrow 2I = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x)$$

درجه سوم $\int (3) \times (3)$ بعد از دو مرحله جزء به جزء به جز اول است که اول است
 در بعد از تکمیل شده است اول تا سه می شود



- (1) است اول توقف صفر می شود
- (2) است اول توقف قابل محاسب است
- (3) همان است اول است

$$I = \int \sin x \cosh x \, dx = + \sin x \sinh x - \cos x \cosh x - I$$

u	v
$\sin x$ \oplus	$\cosh x$
$\cos x$ \ominus	$\sinh x$
$-\sin x$ \oplus	$\cosh x$

$$I = \frac{1}{2} (\sin x \sinh x - \cos x \cosh x)$$

uniland.ir

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟
معمولا یک سوال تشریحی یا تستی از این قسمت طرح می‌شود.

$$\int \frac{\text{عدد برای}}{\text{عدد برای}} dx$$

uniland.ir

انواع کسر گویا ساده

$\frac{A}{(x-a)^k}$	نوع اول
$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$	نوع دوم

درجه یک ←
 $\Delta = p^2 - 4q < 0 \Leftarrow$ تجزیه نمی شود

تقلیل
 غیر ساده ← نوع ساده اول و دوم

uniland.ir

انتگرال کسر گویا نوع اول

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{2}{x+2} dx = 2 \ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4} dx = 5 \int (x-2)^{-4} dx = 5 \frac{(x-2)^{-3}}{-3} = -\frac{5}{3} (x-2)^{-3} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{(2x-1)^3} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2 dx}{(2x-1)^3} = \frac{5}{2} \frac{(2x-1)^{-2}}{-2} \\ &= -\frac{5}{4} \frac{1}{(2x-1)^2} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{u' dx}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$$

انتگرال کسر گویا نوع دوم

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\frac{1}{2} dx}{1 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$\ln u = \int \frac{u'}{u} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4)$$

$$u' = 2x + 0$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+4} dx = \underbrace{\int \frac{x}{x^2+4} dx}_{\ln} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+4} dx}_{\tan^{-1}}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \frac{\frac{1}{3}}{9} \int \frac{\frac{1}{3} dx}{1 + \left(\frac{x+1}{3}\right)^2}$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$9 + (x+1)^2 = x^2 + 2x + \textcircled{1} + 9$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{3} \right)$$

مربع کامل کردن

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3}$$

9V/10

$$\frac{1}{3} \int \frac{dx}{1 + \frac{(x+2)^2}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{3} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} dx}{1 + \left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{\sqrt{3}} \right) + c$$

انتگرال کسر گویا غیر ساده

مثال: کسرهای زیر را تفکیک کنید.

حده کسر اول / کسر اول

$$\frac{x^4 + 3}{x^3(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{Fx+G}{x^2+2} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{C}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{A}{x}$$

کسر اول / کسر اول

$$\frac{x^2 - 4}{x^4 + 4x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

کسر اول / کسر اول

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

$\Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$ کسر ساده نیست

$$(x-1)(x-2)$$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow x = A(x-2) + B(x-1)$$

@ $x=2 \Rightarrow 2 = 0A + B \Rightarrow B=2$

@ $x=1 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A=-1$

$$\boxed{\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}}$$

تشریحی: انتگرال نامعین $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ را حل کنید. (۹۸/۴)

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{\beta x + c}{x^2+1} + \frac{A}{x-1} \quad x(x-1)(x^2+1)$$

نوع دوم نوع اول

$$x = (\beta x + c)(x-1) + A(x^2+1) = \beta x^2 + \dots + Ax^2 + \dots$$

$$@ x=1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$@ x=0 \Rightarrow 0 = -c + \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$x^2 \text{ فیر } \Rightarrow 0 = A + \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right)$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx = \frac{1}{2} \left(\ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x \right) + C$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

$\rightarrow u$

تغییر متغیر تبدیل به کسر گویا

$$x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$$

دلفرانسیل

تشریحی: انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$ را حل کنید. (۹۶/۱۰)

$$\int \frac{4t^3 dt}{t^2 - t} = \int \frac{4t^2 dt}{(t-1)t} = 4 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt$$

$$t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

$$4 \int \frac{(t-1)(t+1) + 1}{t-1} dt = 4 \int \left(t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt$$

$$4 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right) + C =$$

$$t = x^{\frac{1}{4}}$$

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

(۹۶/۳)

تست: انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ را حل کنید.

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{(t^3+1)^{\frac{1}{3}} dt}{t+1}$$

$$t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1) \Rightarrow$$

$$6 \int \left(\underbrace{t^2 - t + 1}_{\text{خارج قسمت}} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{t^3} \\
 -t^3 + t^2 \\
 \hline
 \textcircled{-t^2} \\
 +t^2 + t \\
 \hline
 +t \\
 +1 \\
 \hline
 \textcircled{-1}
 \end{array}$$

باقی! $\textcircled{-1}$

$$I = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t+1| \right) + C$$

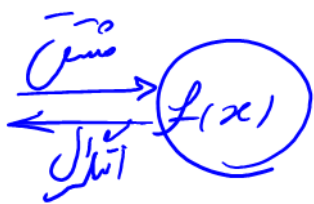
$$x = t^6 \Rightarrow \textcircled{t = x^{\frac{1}{6}}}$$

$$I = 2\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln |x^{\frac{1}{6}} + 1| + C$$

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟
همیشه حداقل یک تست از این درسنامه طرح می‌شود.

uniland.ir

چگونه از انتگرال نامعین مشتق بگیریم!؟



تست: چنانچه $f(x) = \int x \sin^2 x dx$ و $g(x) = \int x \cos^2 x dx$ مقدار $f'(x) + g'(x)$ کدام

(۹۸/۴)

است؟

~~$\frac{d}{dx} \int$~~

$$x \sin^2 x + x \cos^2 x = x (\sin^2 + \cos^2)$$

- (۱) x
- (۲) x^2
- (۳) 1
- (۴) $2x$

(۹۷/۴)

تست: اگر $\int f(x) dx = x^4 + 1$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

$4x^3 + 0 = f(x)$ $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ $x^4 + 1$
 $\xleftarrow{\text{مشتق}}$

- (۱) $x^4 + 1$
- (۲) $4x^3$
- (۳) $4\sqrt{x}$
- (۴) $4x^3 + 1$

چگونه از انتگرال زیر مشتق بگیریم؟

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

مشتق انتگرال
بند بالا را با پایین مشتق انتگرال ه ببرد.

مثال: از انتگرال های زیر مشتق بگیرید.

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt \Rightarrow F'(x) = \sin(x^2)$$

$$\int_a^{u(x)} f(t) dt \xrightarrow{\text{مشتق}} f(u) \cdot u'$$

$$F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t^2) dt \Rightarrow F'(x) = 2x \cdot \sin(x^4)$$

$t \rightarrow x^2$

تست: مشتق $F(t) = \int_0^{t^3} x \cos x \, dx$ کدام است؟ (۹۶/۱۰)

$$F'(t) = t \cos t \quad (۱)$$

$$F'(t) = t^3 \cos t^3 \quad (۲)$$

$$F'(t) = 3t^5 \cos t^3 \quad (۳)$$

$$F'(t) = 3t^2 \cos t^3 \quad (۴)$$

$$3t^2 \cdot t^3 \cos t^3 = 3t^5 \cos t^3$$

uniland.ir

تست: اگر $F(x) = \int_3^{2x} \frac{dt}{1+t^3}$ آنگاه $F'(1)$ کدام است؟ (۹۶/۳ و ۹۷/۱۰)

$$\left(\int_3^{2x} \frac{dt}{1+t^3} \right)' = 2 \times \frac{1}{1+8x^3} \Big|_{x=1} = \frac{2}{9}$$

$\frac{1}{9}$ (۱)

۹ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۳)

$\frac{2}{9}$ (۴)

uniland.ir

تست: مشتق تابع $\int_{-2}^{\sqrt{t}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{1+x^2}} dx$ کدام است؟ (۹۵/۱۰)

$\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}}$
 \sqrt{t}

$\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$
 $\frac{\sin \sqrt{t}}{1+\sqrt{1+t}}$
 $\frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\frac{\sin x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ (۱)

$\frac{\sin \sqrt{t}}{2(1+\sqrt{1+t^2})}$ (۲)

$\frac{\sin \sqrt{t}}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{1+t^2})}$ (۳)

$\frac{\cos x}{2(1+\sqrt{1+x^2})}$ (۴)

uniland.ir

تست: چنانچه $f(x) = \int_0^{\ln x} \sin e^t dt$ و $x > 0$ مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟ **(۹۸/۴)**

$$\int_0^{\ln x} (\sin e^t) dt$$

$$\frac{1}{x} (\sin e^{\ln x}) = \frac{1}{x} (\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

- $\frac{\pi}{2}$ (۱)
- 1 (۲)
- $\frac{2}{\pi}$ (۳)
- 0 (۴)

تست: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3) dt}{x^4}$ کدام است؟ (۹۶/۳)

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{4}$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{قضیه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3) dt}{x^4} = \frac{0}{0} \quad \#$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{4x^3} = \frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

$\sin u \approx u$

درسنامه ۱۱: کاربرد انتگرال معین

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟

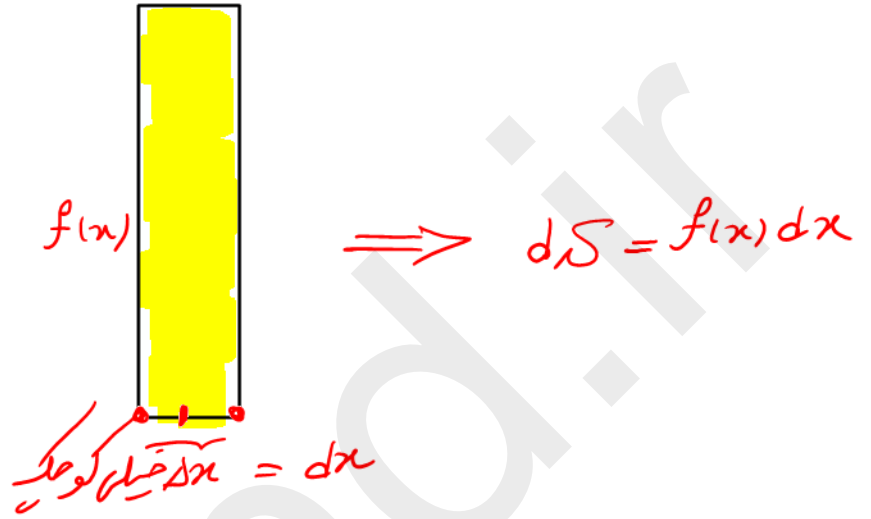
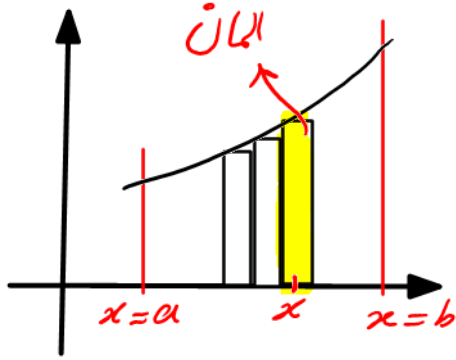
۹۵-۳	۹۵-۱۰	۹۶-۳	۹۶-۱۰	۹۷-۴	۹۷-۱۰	۹۸-۴	
۰/۳۵	۰/۳۵	۱/۵	۱/۸	۰/۹	۰/۳	۱/۸	نمره

مقدار متوسط تابع	مساحت بین دو نمودار	مساحت زیر نمودار
مرکز سطح و جرم	مساحت حاصل از دوران	حجم حاصل از دوران

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \text{مساحت } y=f(x) \text{ از } x=a \text{ تا } x=b$$

مساحت زیر نمودار

مثال: مساحت زیر نمودار تابع $f(x) = x^2$ در بازه $[1,2]$ را بدست آورید.



منقسم چیزی انداز همان جمع ایمانهاست.

$$S = \int_a^b f(x) dx = \text{مساحت زیر نمودار}$$

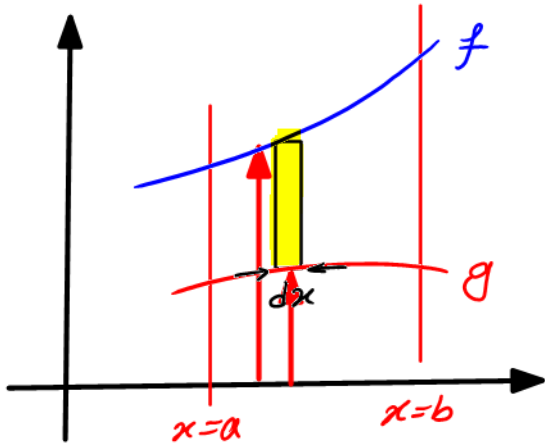
بالا محور x (+) پایین محور x (-)

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

مساحت بین دو نمودار

تست: مساحت ناحیه محدود بین منحنی $y = g(x)$ و $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ کدام است؟

(۹۶/۳)



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \quad (۱)$$
$$S = \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx \quad (۲)$$
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (۳)$$
$$S = 2\pi \int_a^b x |f(x) - g(x)| dx \quad (۴)$$

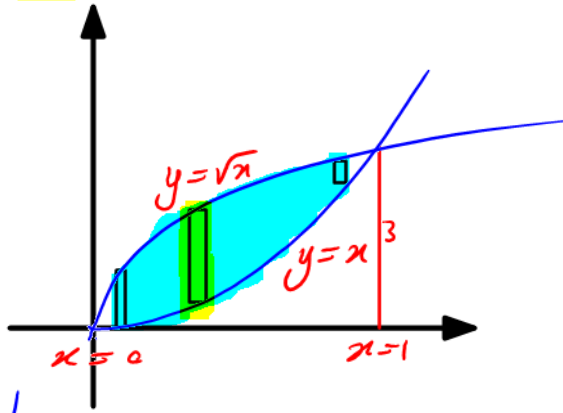
$\int_a^b (f - g) dx$ $f > g$

$\int_a^b (g - f) dx$ $f < g$

$\Rightarrow |f - g|$

تست: مساحت ناحیه‌ی محدود بین دو منحنی $y = \sqrt{x}$ و $y = x^3$ کدام است؟

(۹۷/۴)

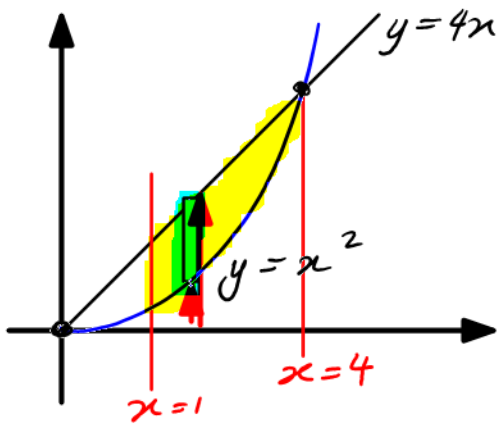


- (۱) $\frac{5}{12}$
- (۲) $\frac{11}{12}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - (0) = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

تشریحی: مساحت ناحیه محدود بین دو منحنی $y = x^2$ و خطوط $y = 4x$ و $x = 1$ را بدست

آورید. (۹۶/۳)

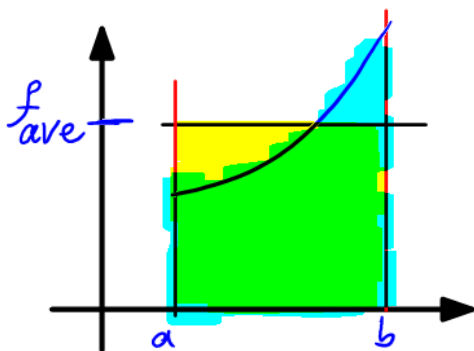


$$x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

$$S = \int_1^4 (4x - x^2) dx = \left[4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^4 = 32 - \frac{64}{3} - \left(2 - \frac{1}{3} \right) \\ 30 - \frac{63}{3} = 30 - 21 = \textcircled{9}$$

مقدار متوسط تابع

تست: مقدار متوسط تابع $f(x) = x^2$ در بازه $[-1,1]$ کدام است؟ (۹۵/۳)



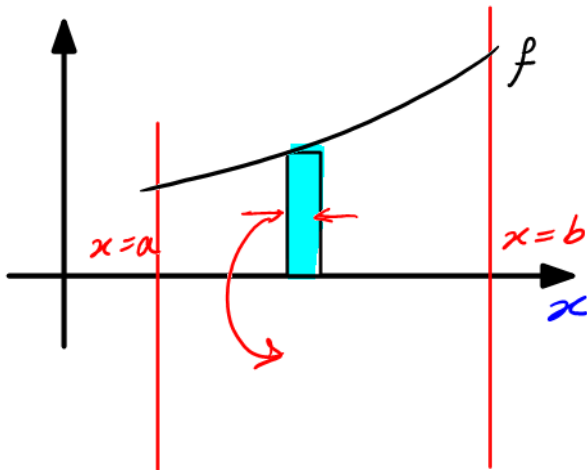
- 0 (۱)
- 1/3 (۲)
- 2 (۳)
- 1/2 (۴)

$$\int_a^b f(x) dx = f_{ave} \cdot (b-a)$$

✓ $f_{ave} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{2} = \frac{\left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1}{2}$

$$\frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$$

تست: فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و در این بازه نامنفی باشد. اگر ناحیه زیر منحنی تابع حول محور x ها دوران کند، حجم حاصل از دوران برابر است با: (۹۷/۱۰)



$$V = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

$$V = \int_a^b \pi f(x) dx \quad (2)$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx \quad (3)$$

$$V = \int_a^b 2\pi f(x) dx \quad (4)$$



حجم لایه = $\pi f^2 dx$
ضخامت \times مساحت قاعده

تست: حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y = e^{-x}$ در فاصله $[0,1]$ حول محور x ها از

کدام رابطه بدست می آید؟ **(۹۷/۴)**

$$\int \pi f^2 dx$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx \quad (۱)$$

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx \quad (۲)$$

$$\int_0^1 \pi x f(x) dx \quad (۳)$$

$$\int_0^1 \pi f^2(x) dx \quad (۴)$$

uniland.ir

تست: ناحیه محدود به منحنی $y = \sin x$ و محور x را در فاصله $[0, \pi]$ حول محور x ها دوران

می‌دهیم. حجم حاصل کدام است؟ **(۹۶/۱۰)**

$$\int \pi f^2 dx$$

$$\int_0^{\pi} \pi x \sin^2 x dx \quad (۱)$$

$$\int_0^{\pi} 2\pi x \sin^2 x dx \quad (۲)$$

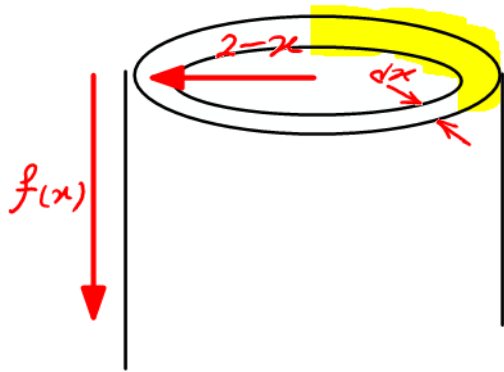
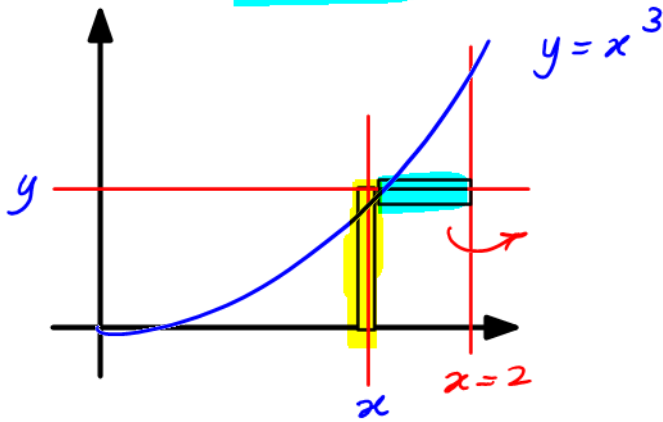
$$\int_0^{\pi} \pi \sin^2 x dx \quad (۳)$$

$$\int_0^{\pi} 2\pi x \sin x dx \quad (۴)$$

uniland.ir

تشریحی: حجم حاصل از دوران ناحیه بین $y = x^3$ و $x = 2$ و $y = 0$ حول $x = 2$ را پیدا کنید.

(۹۸/۴)

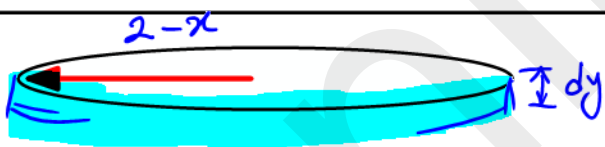


مساحت قاع = مساحت \times ضخامت = $2\pi(2-x)dx$

$dV =$ مساحت قاع \times ارتفاع = $2\pi(2-x)f(x)dx$

$$V = \int_0^2 2\pi(2x^3 - x^4) dx = 2\pi \cdot \left(\frac{2x^4}{2^4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

$$V = 2\pi \left(8 - \frac{32}{5} \right) = \frac{16\pi}{5}$$



مساحت قاع = $\pi r^2 = \pi(2-x)^2$

$$dV = \pi(2-x)^2 dy \Rightarrow \int_0^8 \pi(2-x)^2 dy$$

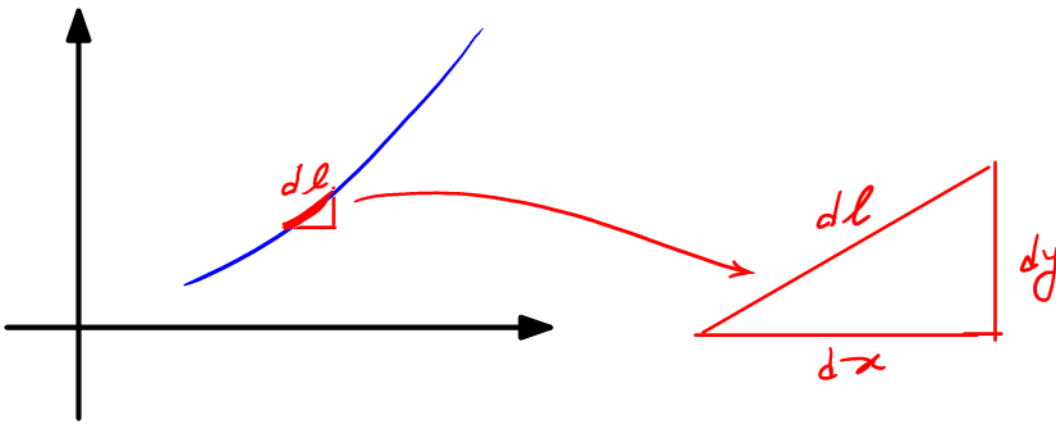
$x^3 = y$
 $x = y^{\frac{1}{3}}$

$$\int_0^8 \pi \left(2 - y^{\frac{1}{3}} \right)^2 dy = \pi \int_0^8 \left(4 - 4y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right) dy$$

$$\pi \left(4y - 4 \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right) \Big|_0^8$$

$8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$
 $8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$

$$\pi \left(32 - \frac{48}{3} + \frac{3}{5} \times 32 \right) = \pi \left(-16 + \frac{96}{5} \right) = \frac{16\pi}{5}$$



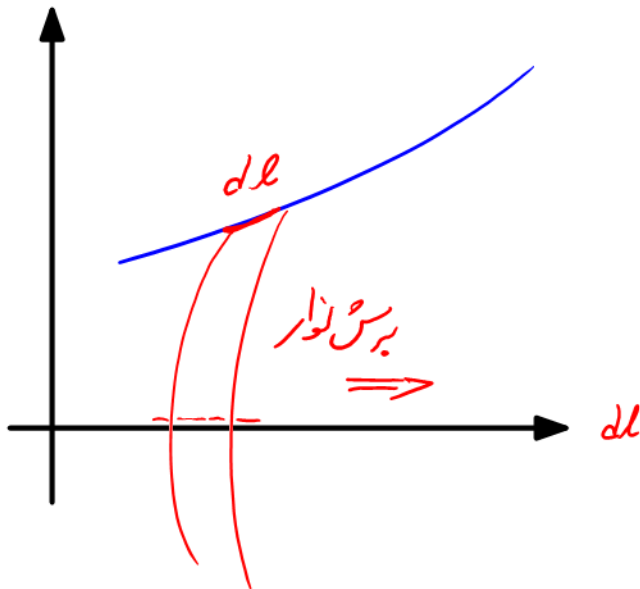
$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow \boxed{dl = \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

مساحت سطح حاصل از دوران

تست: مساحت سطح حاصل از دوران $y = \frac{r}{h}x$ در فاصله $[0, h]$ حول محور x ها کدام است؟

(۹۸/۴)



- $2\pi rh$ (۱)
- $\pi r^2 h$ (۲)
- $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ (۳)
- $\frac{\pi r^2 h}{3}$ (۴)



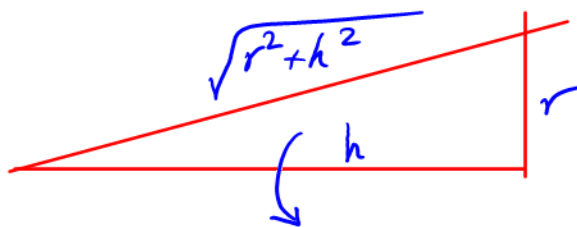
$$dS = 2\pi r dl \Rightarrow dS = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$f(x) = \frac{r}{h}x$

$$dS = \int_0^h 2\pi \cdot \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx$$

$$2\pi \frac{r}{h} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \cdot \int_0^h x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{h^2}{2}$$

$$S = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$



تست: میله‌ای به طول ۱ متر را که چگالی آن در نقطه x متر از مبدا برابر $\rho(x) = x^2$ است در نظر بگیرید. مرکز جرم این میله کدام است؟ (۹۶/۱۰)

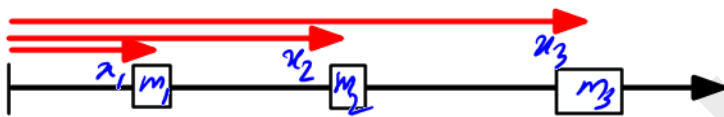
وزن ضربت x نوره
 مرکز جرم = $\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$

$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx}$ (۱)

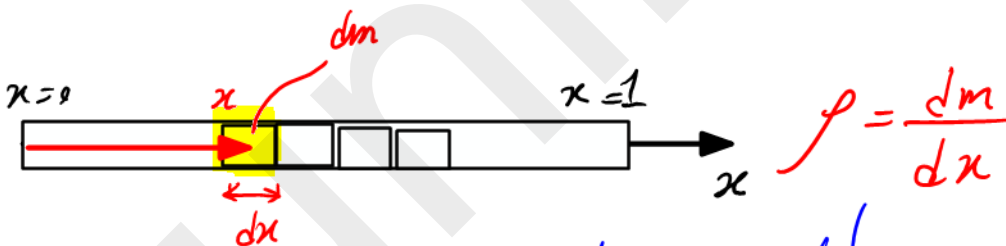
$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x^4 dx}{\int_0^1 x^2 dx}$ (۲)

$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x^3 dx}$ (۳)

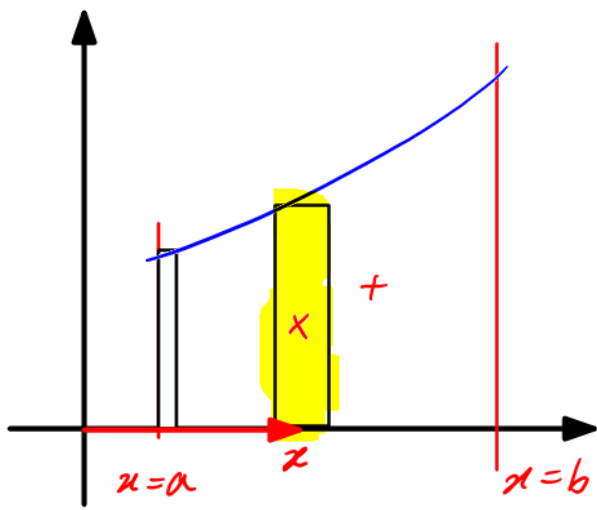
$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x^4 dx}$ (۴)



$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$
 مرکز جرم = میانگین‌ها



$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int_0^1 x \cdot x^2 dx}{\int_0^1 x^2 dx}$



تست: طول مرکز جرم کل ورقه عبارتند از **(۹۷/۴)**

- ~~$\bar{X} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b x f(x) dx}$ (۱)~~
- ~~$\bar{X} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}$ (۲)~~
- ~~$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$ (۳)~~
- $\bar{X} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$ (۴)

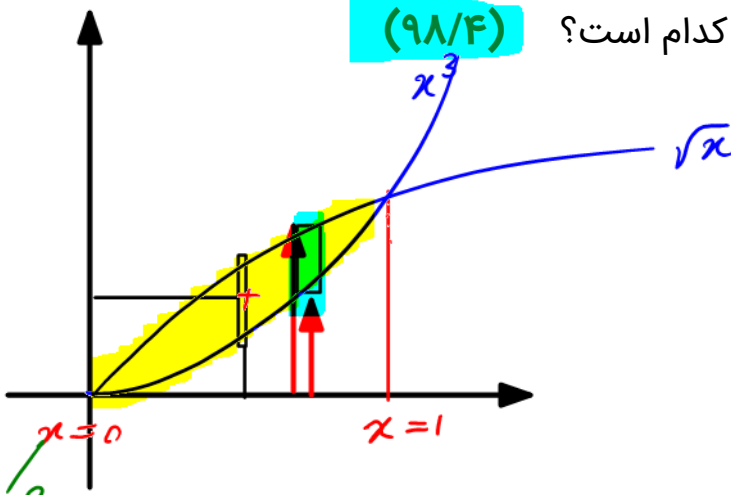
دولبعدی

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dS}{\int dS} = \frac{\int x f(x) dx}{\int f(x) dx}$$

uniland.ir

(9/4)

تست: مرکز ناحیه محدود به $y = \sqrt{x}$ و $y = x^3$ به کدام است؟



- (1) $(\frac{12}{5}, \frac{3}{7})$
- (2) $(\frac{12}{15}, \frac{13}{17})$
- (3) $(\frac{12}{25}, \frac{3}{7})$
- (4) $(\frac{12}{25}, \frac{3}{7})$

میانگین \bar{x} برای این ناحیه

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dS}{\int dS} = \frac{\int_0^1 x (\sqrt{x} - x^3) dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^5}{5})|_0^1}{(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4})|_0^1} = \frac{\frac{1}{5} - 0}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{25}$$

Final exam

درسنامه ۱۲: سوال پرتکرار از کاربرد انتگرال

سوال مهم: چقدر می‌تونیم از این درسنامه نمره بگیریم؟

این سوال در ۴ امتحان مختلف آمده است.

۹۷/۴ - ۹۶/۱۰ - ۹۶/۳ - ۹۵/۱۰

uniland.ir

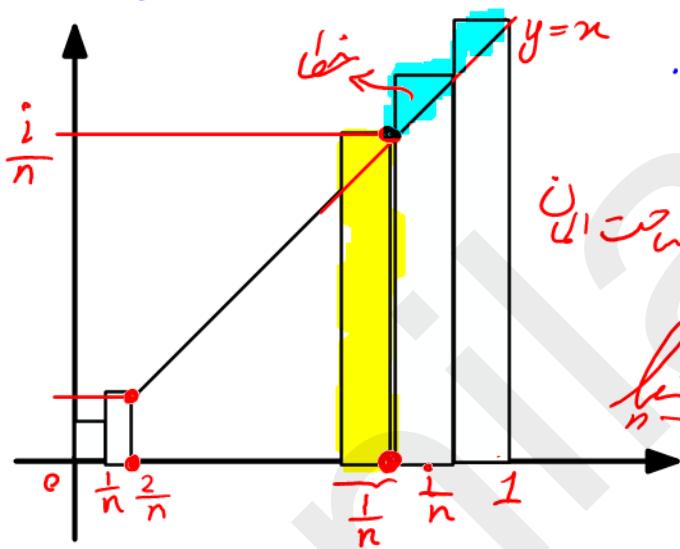
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$\int_a^b f(x) \, dx =$ مساحت زیر نمودار $f(x)$



بازه $[0, 1]$ را n تالان در شتابن.

مساحت التان $= \frac{i}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

مساحت زیر نمودار $\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n)$